АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА • 2

Математика для техникумов

АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА

Часть 2

Математика
для
техникумов

АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА

ЧАСТЬ 2

Издание 2-е, исправленное
и дополненное

Под редакцией Г. Н. ЯКОВЛЕВА

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебника для средних специальных учебных заведений

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1981

22.10
А 45
УДК 512

Коллектив авторов:
М. И. КАЧЕНОВСКИЙ, Ю. М. КОЛЯГИН,
А. Д. КУТАСОВ, Г. Л. ЛУКАНКИН,
В. А. ОГАНЕСЯН, Г. Н. ЯКОВЛЕВ

Мечислав Игнатьевич Каченовский,
Юрий Михайлович Колягин,
Александр Дмитриевич Кутасов,
Геннадий Лаврович Луканкин,
Вачаган Арташесович Оганесян,
Геннадий Николаевич Яковлев

АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА
Часть 2

Редактор *Т. А. Панькова*
Технический редактор *В. Н. Кондакова*
Корректоры: *Т. С. Плетнева, Т. С. Вайсберг*

ИБ № 11749

Сдано в набор 18.02.81. Подписано к печати 10.09.81. Формат $84\times108^1/_{32}$. Бумага тип. № 3. Литературная гарнитура. Высокая печать. Условн. печ. л. 17,64. Уч.-изд. л. 17,88. Тираж 450 000 экз. (2-й завод 200 001—450 000 экз.). Заказ № 776. Цена 70 коп.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Печать с матриц ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного Знамени Первой Образцовой типографии имени А. А. Жданова Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Москва, М-54, Валовая, 28 в Ленинградской типографии № 6 ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 193144, г. Ленинград, ул. Моисеенко, 10.

М $\frac{20203-082}{053\,(02)-81}$ 25-81. 1702050000

© Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы,
1981, с изменениями

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 8

Глава I. Комплексные числа 9

§ 1. Определение комплексных чисел 9

1. Предварительные замечания (9). 2. Определение комплексного числа. Свойства операций над комплексными числами (12). Упражнения 1.1—1.11 (17).

§ 2. Геометрическая интерпретация комплексных чисел. Модуль и аргументы комплексного числа 19

1. Комплексная плоскость (19). 2. Модуль комплексного числа (21). 3. Аргументы комплексного числа (23). Упражнения 1.12—1.24 (24).

§ 3. Различные формы записи комплексных чисел. Операции над комплексными числами 25

1. Алгебраическая и тригонометрическая формы записи комплексного числа (25). 2. Умножение и деление комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме (28). 3. Возведение в степень и извлечение корня (30). 4. Квадратные уравнения (33). 5. Комплексная степень числа e (35). 6. Показательная форма записи комплексного числа (36). Упражнения 1.25—1.41 (39).

Глава II. Неопределенный интеграл 42

§ 4. Дифференциал функции 42

1. Определение дифференциала функции (42). 2. Геометрический смысл дифференциала (43). 3. Приложение дифференциала к приближенным вычислениям (45). Упражнения 2.1—2.3 (47).

§ 5. Неопределенный интеграл и его свойства 47

1. Первообразная и неопределенный интеграл (47). 2. Основные свойства неопределенного интеграла (49). 3. Таблица неопределенных интегралов (50).

§ 6. Методы интегрирования 51

1. Примеры непосредственного интегрирования (51). 2. Интегрирование методом замены переменной (метод подстановки) (55). 3. Интегрирование по частям (58). 4. Интегрирование некоторых

рациональных функций (63). 5. Примеры «неберущихся» интегралов (67).
Упражнение 2.4 (67).

Глава III. Определенный интеграл 70

§ 7. Площадь криволинейной трапеции 70
Упражнения 3.1—3.4 (74).

§ 8. Определенный интеграл 74
1. Определение интеграла (74). 2. Теоремы об интегрируемости функций на отрезке (75). 3. Пример неинтегрируемой функции (76).

§ 9. Свойства определенных интегралов 76
1. Основные свойства определенных интегралов (76). 2. Следствие из основных свойств (78). 3. Некоторые обобщения (79). 4. Теорема о среднем (80). 5. Определенный интеграл с переменным верхним пределом (82).

§ 10. Методы вычисления определенных интегралов 83
1. Формула Ньютона—Лейбница (83). 2. Вычисление определенных интегралов методом подстановки (86). 3. Вычисление определенных интегралов методом интегрирования по частям (90).
Упражнения 3.5—3.13 (92).

§ 11. Приближенные методы вычисления определенных интегралов 93
1. Формула прямоугольников (94). 2. Формула трапеций (96).
Упражнения 3.14—3.17 (99).

Глава IV. Приложения определенного интеграла 101

§ 12. Вычисление площадей плоских фигур с помощью определенного интеграла 101
Упражнение 4.1 (106).

§ 13. Длина дуги кривой 106
Упражнение 4.2 (109).

§ 14. Применение определенного интеграла при решении физических и технических задач 110
1. Задача о вычислении пути (110). 2. Задача о силе давления жидкости (112). 3. Работа переменной силы (114). 4. Статические моменты и координаты центра масс (116).
Упражнения 4.3—4.40 (122).

Глава V. Функции многих переменных и кратные интегралы 125

§ 15. Функции многих переменных 125
1. Определение функции многих переменных (125). 2. Непрерывность функций многих переменных (126). 3. Частные производные (127). 4. Предел функций многих переменных (129). 5. Дифференциалы функций многих переменных (131).
Упражнения 5.1—5.10 (133).

§ 16. Кратные интегралы 134

1. Определение и свойства двойного интеграла (случай прямоугольника) (134). 2. Сведение двойного интеграла к повторному (случай прямоугольника) (135). 3. Определение двойного интеграла для произвольной области (138). 4. Тройные интегралы (139)

Упражнения 5.11—5.16 (141).

§ 17. Приложения кратных интегралов 141

1. Масса плоской пластинки переменной плотности (141). 2. Объем тела (143). 3. Масса тела переменной плотности (144).

Упражнения 5.17—5.19 (145).

Глава VI. Комбинаторика и формула Ньютона для степени бинома 146

§ 18. Размещения, перестановки, сочетания 146

1. Примеры простейших комбинаторных задач (146). 2. Размещения и перестановки (148). 3. Сочетания (151).

Упражнения 6.1—6.27 (155).

§ 19. Формула Ньютона 156

Упражнения 6.28—6.41 (162).

Глава VII. Элементы теории вероятностей 164

§ 20. Случайные события. Вероятность события 164

1. Случайные события и операции над ними (164). 2. Опыт с равновероятными исходами. Классическое определение вероятности события (168).

Упражнения 7.1—7.8 (171).

§ 21. Основные теоремы теории вероятностей и их следствия 172

1. Теорема сложения (172). 2. Условная вероятность. Теорема умножения. Независимость событий (174). 3. Формула полной вероятности (180). 4. Формулы Байеса (182).

Упражнения 7.9—7.30 (185).

§ 22. Серии независимых опытов. Формула Я. Бернулли . . . 187

Упражнения 7.31—7.38 (192).

§ 23. Случайные величины 193

1. Закон распределения случайной величины (193). 2. Математическое ожидание случайной величины (197). 3. Дисперсия случайной величины (198). 4. Неравенство Чебышева (202). 5. Закон больших чисел (204).

Упражнения 7.39—7.53 (206).

Глава VIII. Дифференциальные уравнения 208

§ 24. Примеры дифференциальных уравнений 208

1. Размножение бактерий (208). 2. Радиоактивный распад (210). 3. Общие замечания об уравнениях образования и распада вещест-

ва (211). 4. Дифференциальное уравнение кривой, которая в каждой своей точке имеет заданную касательную (212).
Упражнения 8.1—8.8 (213).

§ 25. Основные понятия и определения теории дифференциальных уравнений первого порядка 214
Упражнения 8.9—8.12 (217).

§ 26. Уравнения с разделяющимися переменными 217
1. Определения и примеры (217). 2. Правило нахождения общего решения (220).
Упражнения 8.13—8.19 (223).

§ 27. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка 224
1. Общее решение линейного уравнения первого порядка (224). 2. Метод вариации постоянной (227).
Упражнения 8.20—8.23 (229).

§ 28. Примеры дифференциальных уравнений второго порядка 229
1. Уравнение движения точки (229). 2. Движение точки под действием постоянной силы (230). 3. Движение точки под действием периодической силы (232). 4. Движение точки под действием силы, пропорциональной скорости (233).
Упражнения 8.24—8.29 (235).

§ 29. Гармонические колебания 235
1. Уравнение гармонических колебаний (235). 2. Колебания точки под действием упругой силы (237). 3. Колебания математического маятника (239).
Упражнения 8.30—8.33 (241).

§ 30. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами 241
1. Дифференциальные уравнения второго порядка (241). 2. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами (242). 3. Характеристическое уравнение (244). 4. Случай комплексных решений характеристического уравнения (245). 5. Случай, когда характеристическое уравнение имеет одно решение (246). 6. Неоднородные линейные уравнения (247).
Упражнения 8.34—8.37 (248).

Глава IX. Числовые и степенные ряды 250

§ 31. Числовые ряды 250
1. Определение ряда и его суммы (250). 2. Ряды с неотрицательными членами (255). 3. Абсолютно и условно сходящиеся ряды (259). 4. Последовательности и ряды с комплексными членами (262).
Упражнения 9.1—9.5 (266).

§ 32. Степенные ряды 267
1. Радиус сходимости и круг сходимости степенного ряда (267). 2. Степенные ряды с действительными членами (272).
Упражнения 9.6—9.8 (274).

§ 33. Ряды Тейлора 275

1. Формула Тейлора (275). 2. Формула Тейлора для некоторых элементарных функций (280). 3. Ряды Тейлора (283). 4. Функции e^z, $\sin z$ и $\cos z$ (287).
Упражнения 9.9—9.12 (288).

Глава X. **Ряды Фурье.** 289

§ 34. Ряды Фурье для периодических функций с периодом $T=2\pi$ 289

1. Постановка задачи и определение ряда Фурье (289). 2. Теорема о сходимости ряда Фурье (295). 3. Ряды Фурье для четных и нечетных функций (298). 4. Разложение функций, заданных на отрезке вида $[a;\ a+2\pi]$ (302).
Упражнения 10.1—10.5 (305).

§ 35. Ряды Фурье для периодических функций с произвольным периодом $T=2l$, $l>0$ 306

1. Определение ряда Фурье (306). 2. Ряды Фурье для четных и нечетных функций (309). 3. Разложение функций, заданных на отрезке вида $[a;\ a+2l]$ (311).
Упражнения 10.6—10.10 (313).

§ 36. Комплексная форма рядов Фурье 314

1. Ряды Фурье для функций с периодом 2π (314). 2. Ряды Фурье для функций с произвольным периодом $T=2l$ (319).
Упражнения 10.11—10.13 (321).

Ответы 322

Приложения 334

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книга является второй частью учебника «Алгебра и начала анализа», написанного в соответствии с новой программой по математике для средних специальных учебных заведений. Здесь изложена теория комплексных чисел, простейшие методы интегрирования, элементы комбинаторики и теории вероятностей и теория простейших дифференциальных уравнений первого и второго порядков. Много внимания уделяется приложениям интеграла и дифференциальных уравнений к решению конкретных физических задач.

Во втором издании, кроме теории числовых и степенных рядов, излагается еще и теория тригонометрических рядов Фурье. Новая глава «Функция многих переменных и кратные интегралы» содержит элементы дифференциального и интегрального исчислений для функций многих переменных. Теоретический материал подкрепляется разбором многочисленных примеров. В конце каждого параграфа приведены упражнения для самостоятельной работы учащихся.

Авторы считают своим приятным долгом выразить благодарность профессору Я. С. Бугрову и заслуженному учителю школы РСФСР Л. А. Клюевой, внимательно прочитавшим рукопись и сделавшим ряд ценных замечаний.

Глава I
КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

§ 1. Определение комплексных чисел

1. Предварительные замечания. Во многих разделах математики и ее приложений невозможно ограничиться рассмотрением лишь действительных чисел. Потребности этих разделов заставляют обобщить понятие числа и ввести в рассмотрение множество комплексных чисел, более обширное по сравнению с множеством действительных чисел.

Сама идея расширения множества рассматриваемых чисел не является новой: при изучении математики мы неоднократно встречаемся с ней. Наше представление о числе изменяется по мере расширения круга задач, которые необходимо решать. Если для счета отдельных предметов нам хватает натуральных чисел, то, например, для решения уравнений $px+q=0$, где $p \in N$ и $q \in N$, натуральных чисел мало — нужны рациональные числа. В свою очередь рациональных чисел оказывается недостаточно для измерения длин отрезков. Чтобы любому отрезку можно было приписать длину, необходимо добавить к рациональным числам числа иррациональные, т. е. под числом понимать действительное число. Ограничившись рассмотрением только рациональных чисел, невозможно было бы решить уравнение $x^2-2=0$, так как в множестве рациональных чисел это уравнение не имеет решений.

Но и действительных чисел оказывается недостаточно для решения алгебраических уравнений. Ведь в множестве действительных чисел не имеют решений квадратные уравнения с отрицательным дискриминантом, в том числе простейшие квадратные уравнения с натуральными коэффициентами, например: $x^2+1=0$, $x^2+x+1=0$.

Было бы весьма печально, если бы каждый раз для решения все более сложных уравнений приходилось вводить новые, все более сложные числа. К счастью, этого делать не нужно. Для теории алгебраических уравнений дальнейшее обобщение понятия числа, введение чисел более общих, чем комплексные, не требуется *). Оказывается, что в множестве комплексных чисел содержатся не только все решения каждого квадратного уравнения, но и все решения алгебраических уравнений любой степени с действительными или комплексными коэффициентами.

Комплексные числа часто называют мнимыми. Это название не вполне удачно, так как может создать представление о комплексных числах как о чем-то нереальном. Оно объясняется тем, что, хотя комплексные числа стали употребляться еще в XVI веке, они долго продолжали казаться даже выдающимся математикам чем-то реально не существующим, мнимыми в буквальном смысле этого слова. Одному из создателей дифференциального и интегрального исчислений, немецкому математику Г. Лейбницу (1646—1716) принадлежат, например, такие слова: «Комплексное число — это тонкое и поразительное средство божественного духа, почти амфибия между бытием и небытием». Сейчас от всей этой мистики не осталось ничего, кроме, пожалуй, названия «мнимые числа». Уже во времена К. Гаусса (1777 — 1855) было дано геометрическое истолкование комплексных чисел как точек плоскости. Трудами выдающихся математиков XIX века О. Коши, Б. Римана и К. Вейерштрасса на базе комплексных чисел была построена одна из самых красивых математических дисциплин — теория функций комплексной переменной.

Прежде чем давать определение комплексных чисел, обсудим следующие вопросы: какими свойствами должны обладать новые числа, какие операции желательно ввести для них, каким законам должны подчиняться введенные операции?

Прежде всего вспомним, что при переходе от натуральных чисел к целым, от целых к рациональным, от рациональных к действительным каждый раз выполня-

*) Такие числа существуют — это так называемые гиперкомплексные числа, они находят применение в некоторых вопросах геометрии (особенно неевклидовой) и механики.

лось условие: новое расширенное множество чисел содержало в себе первоначальное множество. Целые числа содержали натуральные, в множество рациональных чисел входили целые, множество действительных чисел содержало все рациональные числа. При введении комплексных чисел это условие также должно соблюдаться. Множество комплексных чисел должно включать в себя каждое действительное число.

Для новых чисел необходимо ввести понятие равенства. Должны быть определены сложение и умножение новых чисел, причем так, чтобы для этих операций имели место коммутативные, ассоциативные и дистрибутивный законы. В том случае, когда комплексные числа совпадают с действительными, новые операции сложения и умножения должны превращаться в известные операции сложения и умножения действительных чисел.

Поскольку мы хотим, чтобы в множестве комплексных чисел уравнение $x^2+1=0$ имело решение, нужно ввести некоторое новое число и считать его решением этого уравнения. Будем обозначать это новое число символом (буквой) i. Таким образом, для числа i справедливо равенство $i^2+1=0$ или, поскольку мы хотим, чтобы для новых чисел правила преобразования равенств оставались прежними,

$$i^2=-1.$$

Далее, следует пополнить множество действительных чисел новыми числами bi, их называют мнимыми или чисто мнимыми и считают произведениями действительных чисел b на число i. Наконец, сумму действительного числа a и мнимого числа bi будем записывать в виде $a+bi$.

Для обозначения сложения употребляют знак «+», при записи произведения сомножители пишут рядом, опуская точку — знак умножения. Равные комплексные числа соединяют обычным знаком равенства «=».

Сумму чисел a_1+b_1i и a_2+b_2i естественно определить следующим образом:

$$(a_1+b_1i)+(a_2+b_2i)=a_1+a_2+(b_1+b_2)i.$$

Умножение двух комплексных чисел a_1+b_1i и a_2+b_2i желательно определить так, чтобы его можно было выполнить по обычному правилу умножения двучленов

Применяя это правило, получаем

$$(a_1+b_1i)(a_2+b_2i)=a_1a_2+a_1b_2i+a_2b_1i+b_1b_2i^2$$

или, в силу равенства $i^2=-1$,

$$(a_1+b_1i)(a_2+b_2i)=a_1a_2-b_1b_2+(a_1b_2+a_2b_1)i.$$

Итак, новое множество чисел должно включать в себя множество действительных чисел; в этом множестве должны быть определены операции сложения и умножения, подчиняющиеся обычным алгебраическим законам; введенные операции не должны противоречить операциям сложения и умножения действительных чисел. В следующем пункте будет показано, что всем этим требованиям можно удовлетворить.

2. Определение комплексного числа. Свойства операций над комплексными числами. *Комплексными числами* называются выражения вида $a+bi$ (a и b — действительные числа, i — некоторый символ), для которых следующим образом вводится понятие равенства и операции сложения и умножения:

а) два комплексных числа a_1+b_1i и a_2+b_2i равны тогда и только тогда, когда $a_1=a_2$ и $b_1=b_2$;

б) суммой чисел a_1+b_1i и a_2+b_2i называется число

$$a_1+a_2+(b_1+b_2)i;$$

в) произведением чисел a_1+b_1i и a_2+b_2i называется число

$$a_1a_2-b_1b_2+(a_1b_2+a_2b_1)i.$$

Таким образом, сложение и умножение комплексных чисел производятся согласно формулам

$$(a_1+b_1i)+(a_2+b_2i)=a_1+a_2+(b_1+b_2)i, \qquad (1)$$

$$(a_1+b_1i)(a_2+b_2i)=a_1a_2-b_1b_2+(a_1b_2+a_2b_1)i. \qquad (2)$$

Комплексные числа часто обозначают одной буквой, причем обычно используют для этого буквы z или w, иногда с индексами, например: z_1, z_2, w_0. Равенство $z=a+bi$ как раз и означает, что комплексное число $a+bi$ обозначено буквой z.

Легко убедиться в том, что введенные операции сложения (1) и умножения (2) обладают следующими свойствами.

1. Коммутативность сложения:

$$z_1+z_2=z_2+z_1.$$

2. Ассоциативность сложения:

$$(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3).$$

3. Для любых комплексных чисел z_1 и z_2 существует комплексное число z такое, что $z_1+z=z_2$. Это число называется *разностью* чисел z_2 и z_1 и обозначается

$$z_2-z_1.$$

4. Коммутативность умножения:

$$z_1z_2=z_2z_1.$$

5. Ассоциативность умножения:

$$(z_1z_2)\,z_3=z_1\,(z_2z_3).$$

6. Для любых комплексных чисел $z_1\neq 0+0i$ и z_2 существует число z такое, что $z_1z=z_2$. Это число называется *частным* комплексных чисел z_2 и z_1 и обозначается $\frac{z_2}{z_1}$. Деление на комплексное число $0+0i$, которое называется *нулем*, невозможно.

7. Дистрибутивность:

$$z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3.$$

Все перечисленные свойства операций сложения и умножения вытекают из формул (1) и (2), дающих определение этих операций, и равенства комплексных чисел. Докажем свойства 3, 6, 7; проверку остальных свойств рекомендуется провести самостоятельно.

Доказательство свойства 3. Пусть $z_1=a_1+b_1i$, $z_2=a_2+b_2i$ и $z=x+yi$. Тогда равенство $z_1+z=z_2$ запишется так:

$$(a_1+b_1i)+(x+yi)=a_2+b_2i.$$

Согласно формуле (1) получаем

$$a_1+x+(b_1+y)\,i=a_2+b_2i,$$

откуда следует, что x и y обязаны удовлетворять системе двух уравнений

$$\begin{cases} a_1+x=a_2, \\ b_1+y=b_2. \end{cases}$$

Эта система имеет одно и только одно решение $x=a_2-a_1$, $y=b_2-b_1$.

Итак, разность комплексных чисел z_2 и z_1 всегда существует, причем

$$z_2 - z_1 = (a_2 - a_1) + (b_2 - b_1)\,i. \qquad (3)$$

Формула (3) дает правило вычитания комплексных чисел.

Доказательство свойства 6. Пусть $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$ и $z = x + yi$. Тогда равенство $z_1 z = z_2$ запишется так:

$$(a_1 + b_1 i)(x + yi) = a_2 + b_2 i.$$

Согласно формуле (2) получаем

$$a_1 x - b_1 y + (a_1 y + b_1 x)\,i = a_2 + b_2 i,$$

откуда следует, что x и y обязаны удовлетворять системе двух линейных уравнений

$$\begin{cases} a_1 x - b_1 y = a_2, \\ b_1 x + a_1 y = b_2. \end{cases}$$

Определитель этой системы

$$\begin{vmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{vmatrix} = a_1^2 + b_1^2$$

не равен нулю, так как по предположению $a_1 + b_1 i \neq 0 + 0i$. Поэтому система имеет одно и только одно решение, которое легко находится:

$$x = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_1^2 + b_1^2}, \quad y = \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_1^2 + b_1^2}.$$

Таким образом, частное двух комплексных чисел при условии, что делитель отличен от нуля, всегда существует, причем

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_1^2 + b_1^2} + \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_1^2 + b_1^2}\,i. \qquad (4)$$

Формула (4) дает правило деления комплексных чисел.

Доказательство свойства 7. Пусть $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$, $z_3 = a_3 + b_3 i$. Вычисляем левую часть равенства:

$$\begin{aligned} z_1 (z_2 + z_3) &= (a_1 + b_1 i)(a_2 + a_3 + (b_2 + b_3)\,i) = \\ &= a_1 (a_2 + a_3) - b_1 (b_2 + b_3) + (b_1 (a_2 + a_3) + a_1 (b_2 + b_3))\,i = \\ &= a_1 a_2 + a_1 a_3 - b_1 b_2 - b_1 b_3 + (b_1 a_2 + b_1 a_3 + a_1 b_2 + a_1 b_3)\,i. \end{aligned}$$

Вычисляем правую часть:

$$z_1z_2+z_1z_3=(a_1+b_1i)(a_2+b_2i)+(a_1+b_1i)(a_3+b_3i)=$$
$$=a_1a_2-b_1b_2+(a_1b_2+b_1a_2)i+a_1a_3-b_1b_3+(a_1b_3+b_1a_3)i=$$
$$=a_1a_2+a_1a_3-b_1b_2-b_1b_3+(b_1a_2+b_1a_3+a_1b_2+a_1b_3)i.$$

Равенство $z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3$ доказано.

Справедливость свойств 1—7 означает, что сложение и умножение комплексных чисел подчиняются тем же законам, что и сложение и умножение действительных чисел.

Более того, введенные операции сложения и умножения позволяют рассматривать комплексные числа как обобщение действительных чисел, а на действительные числа смотреть как на частный случай чисел комплексных. В самом деле, рассмотрим не все комплексные числа, а только комплексные числа вида $a+0i$.

Из формул (1)—(4) легко усматривается, что в результате сложения, умножения, вычитания и деления ($a\neq 0$) таких чисел всегда получаются числа такого же вида. Кроме того, видно, что правила действий с комплексными числами вида $a+0i$ полностью совпадают с соответствующими правилами действий с действительными числами. Эти два обстоятельства и дают возможность отождествить комплексное число $a+0i$ с действительным числом a и считать, что $a+0i=a$. Например, $0+0i=0$, $1+0i=1$, $-1+0i=-1$.

Таким образом, множество действительных чисел является подмножеством множества комплексных чисел.

Заметим еще, что числа $0+bi$ называют *чисто мнимыми* и обозначают просто bi.

Например, $0-2i=-2i$, $0+1i=i$.

Действительное число a называется *действительной частью* комплексного числа $a+bi$. Действительное число b называется *мнимой частью* комплексного числа $a+bi$.

Комплексное число i принято называть *мнимой единицей*.

Согласно определению комплексных чисел два числа $z_1=a_1+b_1i$ и $z_2=a_2+b_2i$ равны тогда и только тогда, когда $a_1=a_2$, $b_1=b_2$, т. е. когда равны и действительные и мнимые части комплексных чисел. Обратим внимание на то, что одно равенство $z_1=z_2$ комплексных чисел равносильно двум равенствам $a_1=a_2$, $b_1=b_2$ действительных чисел. Заметим еще, что понятия «больше»,

«меньше» для комплексных чисел не определяются. Записи $z > 0$, $1 + i < 2$ и им подобные лишены всякого смысла.

Вернемся к формуле (2), определяющей умножение комплексных чисел. Положив в ней $a_1 = a_2 = 0$, $b_1 = b_2 = 1$, получим важное соотношение

$$ii = -1,$$

или, применяя для произведения ii сокращенное обозначение $ii = i^2$,

$$i^2 = -1. \qquad (5)$$

Таким образом, определение умножения, даваемое формулой (2), обеспечивает существование решения уравнения $x^2 + 1 = 0$.

Отметим еще, что формула (2) не нуждается в запоминании, так как получается автоматически, если формально перемножить двучлены $a_1 + b_1 i$ и $a_2 + b_2 i$ по обычному правилу умножения двучленов и затем в соответствии с формулой (5) заменить i^2 на -1.

Пример 1. Найти сумму и произведение комплексных чисел $z_1 = 2 + 5i$ и $z_2 = -1 + 7i$.

По формуле (1) находим

$$z_1 + z_2 = (2 + 5i) + (-1 + 7i) = 1 + 12i.$$

Произведение находим формальным перемножением двучленов $2 + 5i$ и $-1 + 7i$ с последующим учетом соотношения (5):

$$z_1 z_2 = (2 + 5i)(-1 + 7i) = -2 + 14i - 5i + 35i^2 = -37 + 9i.$$

Пример 2. Найти сумму и произведение комплексных чисел $z_1 = x + yi$ и $z_2 = x - yi$.

Сумму находим по формуле (1):

$$z_1 + z_2 = (x + yi) + (x - yi) = 2x.$$

Произведение находим по правилу умножения двучленов:

$$z_1 z_2 = (x + yi)(x - yi) = x^2 - xyi + xyi - y^2 i^2 = x^2 + y^2.$$

Числа $x + yi$ и $x - yi$, т. е. числа, отличающиеся только знаком мнимой части, называются *сопряженными комплексными числами*. Число, сопряженное числу z, обозначается $\bar{z}$. Пример 2 показывает, что сумма $z + \bar{z}$

сопряженных чисел есть всегда число действительное, а произведение $z\bar{z}$ — число действительное и, более того, неотрицательное.

Пример 3. Даны комплексные числа $z_1=-1+6i$ и $z_2=2+5i$. Найти разность z_2-z_1 и частное $\frac{z_2}{z_1}$.

По формуле (3) находим

$$z_2-z_1=(2+5i)-(-1+6i)=3-i.$$

Частное находим по формуле (4):

$$\frac{z_2}{z_1}=\frac{2+5i}{-1+6i}=\frac{(-1)\cdot 2+6\cdot 5}{(-1)^2+6^2}+\frac{(-1)\cdot 5-2\cdot 6}{(-1)^2+6^2}\,i=\frac{28}{37}-\frac{17}{37}\,i.$$

В следующем параграфе будет указан более простой способ деления комплексных чисел, не требующий запоминания формулы (4).

Пример 4. Найти комплексное число

$$z=\frac{(1+i)(1-2i)}{3+i}.$$

Перемножив числа, стоящие в числителе, получим

$$z=\frac{1-2i+i-2i^2}{3+i}=\frac{3-i}{3+i}.$$

Далее можно воспользоваться формулой (4), но удобнее поступить иначе. Умножим числитель и знаменатель дроби $\frac{3-i}{3+i}$ на число, сопряженное знаменателю, т. е. на $3-i$. Тогда получим

$$z=\frac{(3-i)(3-i)}{(3+i)(3-i)}=\frac{9-3i-3i+i^2}{9+1}=\frac{8-6i}{10}=\frac{4}{5}-\frac{3}{5}\,i.$$

Упражнения

1.1. Найдите сумму и произведение комплексных чисел z_1 и z_2, если

а) $z_1=5+4i$, $z_2=-2+3i$;

б) $z_1=0{,}5-3{,}2i$, $z_2=1{,}5-0{,}8i$;

в) $z_1=-8-7i$, $z_2=-3i$;

г) $z_1=5+\sqrt{3}\,i$, $z_2=5-\sqrt{3}\,i$.

1.2. Найдите разность z_2-z_1 и частное $\frac{z_2}{z_1}$, если

а) $z_1=1+i$, $z_2=1-i$;

б) $z_1=1+2i$, $z_2=5$;

в) $z_1=-1+\sqrt{3}\,i$, $z_2=-\sqrt{2}+\sqrt{6}\,i$;

г) $z_1=a-\sqrt{b}\,i$, $z_2=a+\sqrt{b}\,i$.

1.3. Вычислите:

а) $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}i\right)-\left(\frac{3}{5}+\frac{2}{3}i\right)+\left(\frac{3}{4}-\frac{5}{6}i\right)$;

б) $\frac{1+i}{1-i}+\frac{1-i}{1+i}$;

в) $2i\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$;

г) $\left(\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2i}\right)^2$; д) $i^{13}+i^{14}+i^{15}+i^{16}$.

1.4. Найдите действительную часть комплексного числа:

а) $z=\frac{(1+2i)^3}{i}+i^{19}$;

б) $z=\frac{5+2i}{2-5i}-\frac{3-4i}{4+3i}+\frac{1}{i}$.

1.5. Найдите мнимую часть комплексного числа:

а) $z=(2-i)^3(2+11i)$; б) $z=\frac{2-3i}{1+4i}+i^6$.

1.6. Найдите комплексные числа:

а) $z=i+\frac{6i+1}{1-7i}$; б) $z=\frac{(1+2i)^2-(1-i)^3}{(3+2i)^3-(2+i)^2}$;

в) $z=(2+i)^5$; г) $z=\frac{5+12i}{8-6i}+\frac{(1+2i)^2}{2+i}$.

1.7. Решите уравнения:

а) $(i-z)(1+2i)+(1-iz)(3-4i)=1+7i$;

б) $z^2+\overline{z}=0$.

1.8. При каких действительных значениях x и y комплексные числа $z_1=x^2-7x+9yi$ и $z_2=y^2i+20i-12$ равны?

1.9. При каких действительных значениях x и y комплексные числа $z_1=9y^2-4-10xi$ и $z_2=8y^2+20i^7$ являются сопряженными?

1.10. Докажите равенства:

а) $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$; б) $\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\,\overline{z_2}$.

1.11. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} z_1+2z_2=1+i, \\ 3z_1+iz_2=2-3i. \end{cases}$$

§ 2. Геометрическая интерпретация комплексных чисел. Модуль и аргументы комплексного числа

1. Комплексная плоскость. Хорошо известно, что между множеством действительных чисел и множеством точек прямой можно установить взаимно однозначное соответствие. Существование такого соответствия позволяет использовать в алгебре и анализе геометрические соображения, которые часто оказываются весьма полезными. Геометрическую терминологию и геометрические соображения можно с успехом использовать и при изучении комплексных чисел, если установить взаимно однозначное соответствие между множеством комплексных чисел и множеством точек координатной плоскости. Указанное соответствие можно установить следующим образом. Каждому комплексному числу $a+bi$ поставим в соответствие точку $M(a;b)$ координатной плоскости, т. е. точку, абсцисса которой равна действительной части комплексного числа, а ордината — мнимой части. Каждой точке $M(a;b)$ координатной плоскости поставим в соответствие комплексное число $a+bi$ (рис. 1). Очевидно, что получаемое при этом соответствие является взаимно однозначным. Оно дает возможность интерпретировать комплексные числа как точки некоторой плоскости, на которой выбрана система координат. Сама координатная плоскость называется при этом *комплексной плоскостью*. Ось абсцисс называется *действительной осью*, так как на ней расположены точки, соответствующие комплексным числам $a+0i$, т. е. соответствующие действительным числам. Ось ординат называется *мнимой осью* — на ней лежат точки, соответствующие чисто мнимым комплексным числам $0+bi$.

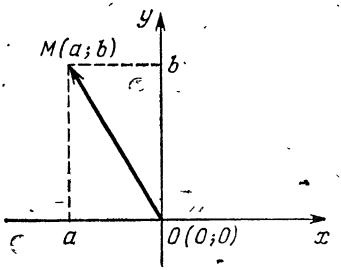


Рис. 1.

Не менее важной и удобной является интерпретация комплексного числа $a+bi$ как вектора $\overrightarrow{OM}$ (рис. 1), т. е. вектора, исходящего из начала координат $O(0;\ 0)$ и идущего в точку $M(a;\ b)$. Разумеется, вместо вектора $\overrightarrow{OM}$ можно взять любой равный ему вектор. Очевидно, что

каждому вектору плоскости с началом в точке $O(0; 0)$, концом в точке $M(a; b)$ соответствует комплексное число $a+bi$, и наоборот. Нулевому вектору соответствует комплексное число $0+0i$.

Соответствие, установленное между множеством комплексных чисел, с одной стороны, и множествами точек или векторов плоскости, с другой, позволяет комплексные числа называть точками или векторами и говорить, например, о векторе $a+bi$ или точке $a+bi$.

Изображение комплексных чисел векторами позволяет дать простое геометрическое истолкование операциям над

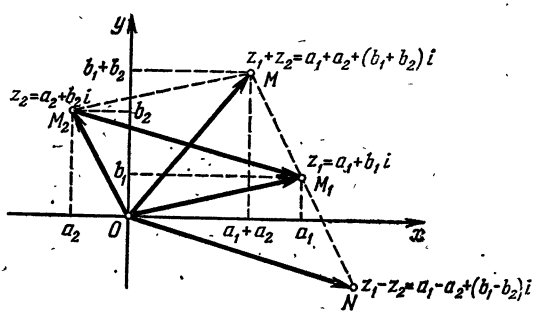


Рис. 2.

комплексными числами. Остановимся пока только на сложении и вычитании комплексных чисел. Геометрический смысл умножения будет выяснен позже.

При сложении чисел $z_1=a_1+b_1i$ и $z_2=a_2+b_2i$ складываются их действительные и мнимые части (рис. 2). При сложении соответствующих им векторов $\overrightarrow{OM_1}$ и $\overrightarrow{OM_2}$ складываются их координаты. Поэтому при установленном соответствии между комплексными числами и векторами сумме z_1+z_2 чисел z_1 и z_2 будет соответствовать вектор $\overrightarrow{OM}$, равный сумме векторов $\overrightarrow{OM_1}$ и $\overrightarrow{OM_2}$. Таким образом, сумма комплексных чисел геометрически может быть истолкована как вектор, равный сумме векторов, соответствующих слагаемым комплексным числам. Совершенно аналогично устанавливается, что разность чисел z_1-z_2 соответствует вектору $\overrightarrow{M_2M_1}$ (или $\overrightarrow{ON}$), равному разности $\overrightarrow{OM_1}-\overrightarrow{OM_2}$ векторов $\overrightarrow{OM_1}$ и $\overrightarrow{OM_2}$ (рис. 2).

2. **Модуль комплексного числа.** Перейдем к рассмотрению понятия модуля комплексного числа.

Определение. *Модулем комплексного числа* называется длина вектора, соответствующего этому числу.

Для модуля числа z используется обозначение $|z|$. Часто модуль обозначают также буквой r. По теореме Пифагора (см. рис. 1) для модуля комплексного числа $z=a+bi$ легко получается следующая важная формула:

$$|z|=\sqrt{a^2+b^2},$$

выражающая модуль числа через его действительную и мнимую части.

Для действительного числа $z=a+0i$ модуль совпадает с абсолютной величиной числа:

$$|z|=|a+0i|=\sqrt{a^2}=|a|.$$

Сопряженные числа $z=a+bi$ и $\bar{z}=a-bi$ имеют, очевидно, одинаковые модули.

Результат, полученный в примере 2 § 1, теперь можно записать так:

$$z\cdot\bar{z}=|z|^2=|\bar{z}|^2,$$

т. е. *произведение сопряженных чисел равно квадрату их модуля.*

Отметим теперь, что для деления комплексных чисел можно не запоминать формулу (4) из § 1.

Соотношение

$$\frac{z_2}{z_1}=\frac{z_2\bar{z}_1}{z_1\bar{z}_1}=\frac{z_2\bar{z}_1}{|z_1|^2}$$

дает возможность свести деление чисел z_2 и z_1 к умножению чисел z_2 и $\bar{z}_1$ и к делению произведения $z_2\bar{z}_1$ на действительное положительное число $|z_1|^2$. В примере 4 § 1 мы уже пользовались этим приемом. Продемонстрируем этот прием еще на одном примере.

Пример 1. Найти частное $\dfrac{i-1}{4-5i}$.

Умножив числитель и знаменатель дроби на число, сопряженное знаменателю, получим

$$\frac{i-1}{4-5i}=\frac{(i-1)(4+5i)}{(4-5i)(4+5i)}=\frac{4i+5i^2-4-5i}{16+25}=-\frac{9}{41}-\frac{1}{41}i.$$

В заключение этого пункта остановимся еще на геометрическом смысле модуля разности двух комплексных чисел.

Согласно определению модуля $|z_1-z_2|$ есть длина вектора z_1-z_2. Вектор z_1-z_2 изображен на рис. 2. Это вектор $\overrightarrow{ON}$, и его длина дает расстояние между точками M_1 и M_2. Таким образом, *модуль разности двух комплексных чисел есть расстояние между точками комплексной плоскости, которые соответствуют этим числам.* Это полезное геометрическое истолкование модуля разности двух комплексных чисел позволяет при решении некоторых задач использовать простые геометрические факты.

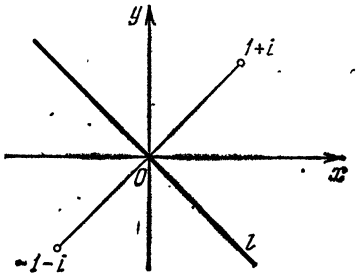


Рис. 3.

Пример 2. Какое множество точек комплексной плоскости задается условием:

а) $|z-1-i|=|z+1+i|$,

б) $|z+i|=1$,

в) $1\leqslant|z+2|\leqslant 2$?

а) Условию

$$|z-(1+i)|=|z-(-1-i)|$$

удовлетворяют те и только те точки комплексной плоскости, которые одинаково удалены от точек $z_1=1+i$ и $z_2=-1-i$. Множество точек плоскости, равноудаленных от двух заданных точек, представляет собой прямую, перпендикулярную отрезку, соединяющему данные точки, и проходящую через его середину. На рис. 3 изображена прямая l, дающая искомое множество.

б) Соотношению

$$|z+i|=1$$

удовлетворяют те и только те точки комплексной плоскости, которые удалены от точки $z_1=-i$ на расстояние, равное единице. Такие точки лежат на окружности единичного радиуса с центром в точке $z_1=-i$ (рис. 4).

в) Из геометрического истолкования модуля разности двух комплексных чисел следует, что комплексные числа z, удовлетворяющие условию

$$1 \leqslant |z+2| \leqslant 2,$$

расположены внутри и на границе кольца, образованного

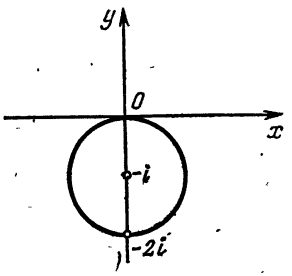


Рис. 4.

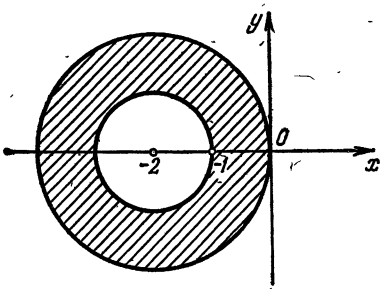


Рис. 5.

двумя концентрическими окружностями с центром в точке $z_1 = -2$ и с радиусами, равными 1 и 2. На рис. 5 искомое множество точек заштриховано.

3. Аргументы комплексного числа. Комплексные числа z, имеющие один и тот же модуль $|z| = r$, соответствуют, очевидно, точкам комплексной плоскости, расположенным на окружности радиуса r с центром в точке $z = 0$ (рис. 6). Если $|z| \neq 0$, то существует, следовательно, бесконечно много чисел с данным модулем. Модуль, равный нулю, имеет только одно комплексное число, а именно $z = 0$.

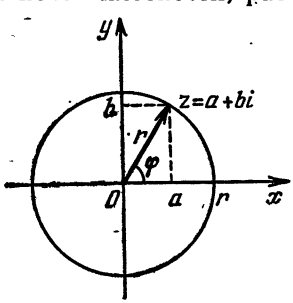


Рис. 6.

Геометрически очевидно, что для того, чтобы из множества комплексных чисел с данным модулем $|z| = r \neq 0$ выделить какое-либо конкретное число, достаточно задать направление вектора z (например, задать угол φ, см. рис. 6).

Определение. *Аргументом* комплексного числа $z \neq 0$ называется величина угла между положительным направлением действительной оси и вектором z, причем величина угла считается положительной, если отсчет ведется против

часовой стрелки, и отрицательной, если отсчет производится по часовой стрелке.

Для обозначения аргументов комплексного числа $z = a+bi$ используется обозначение $\arg z$ или $\arg(a+bi)$. Заданием модуля и аргумента комплексное число определяется однозначно. Для числа $z=0$ аргумент не определяется, но в этом и только в этом случае число задается только своим модулем.

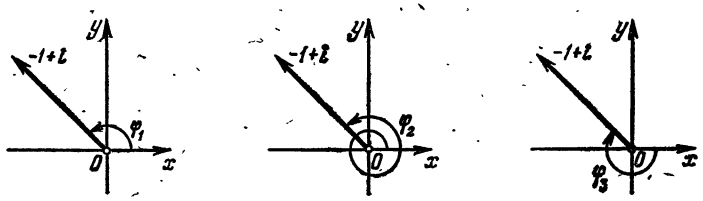


Рис. 7.

Аргумент комплексного числа, в отличие от модуля, определяется не однозначно. Например, аргументами числа $-1+i$ являются следующие углы: $\varphi_1 = \frac{3\pi}{4}$, $\varphi_2 = \frac{3\pi}{4} + 2\pi$, $\varphi_3 = \frac{3\pi}{4} - 2\pi$ (рис. 7) и, вообще, каждый из углов $\varphi_k = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in Z$. Любые два аргумента комплексного числа отличаются друг от друга слагаемым, кратным 2π.

Упражнения

1.12. Постройте векторы: $z=3+2i$, $z=5-4i$, $z=-6+3i$, $z=-1-i$, $z=\cos 30° - i \sin 30°$, $z=\cos 150° + i \sin 150°$, $z=-2$, $z=i$.

1.13. На комплексной плоскости даны точки z_1, z_2, z_3, являющиеся тремя последовательными вершинами некоторого параллелограмма. Найдите четвертую вершину этого параллелограмма.

1.14. На комплексной плоскости даны точки $z_1=6+8i$, $z_2=4-3i$. Найдите комплексные числа, соответствующие точкам, лежащим на биссектрисе угла, образованного векторами z_1 и z_2.

1.15. Найдите модуль комплексного числа:

а) $z=-3$; б) $z=-i$; в) $z=7$; г) $z=1-i$;

д) $z=\cos\pi + i\sin\pi$; е) $z=-5-2\sqrt{6}\,i$.

1.16. Решите уравнения:

а) $|z|-iz=1-2i$; б) $z^2+3|z|=0$;

в) $z^2+|z|^2=0$.

1.17. Решите систему уравнений

$$|z+1-i|=|3+2i-z|=|z+i|.$$

1.18. Какое множество точек комплексной плоскости задается условием:

а) $|z| \leqslant 1$; б) $|z| = 2$; в) $|z - i| \leqslant 0$;
г) $|z + 2| < |z - 2|$; д) $|z + 1| < |z - i|$;
е) $|z + 2i - 1| \leqslant 2$; ж) $2 \leqslant |z - 1 + 2i| < 3$;
з) $\sin|z| > 0$; и) $\lg|z - 10i| < 1$;
к) $|z|^2 + 3z + 3\bar{z} = 0$?

1.19. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} |z+1| = |z+2|, \\ |3z+9| = |5z+10i|. \end{cases}$$

1.20. Найдите аргументы комплексного числа:

а) $z = i$; б) $z = 1 + i$; в) $z = -1$;
г) $z = 8$; д) $z = -3i$; е) $z = 2 - 2i$.

1.21. Какое множество точек комплексной плоскости задается условием:

а) один из аргументов числа z равен нулю;
б) один из аргументов равен $\frac{\pi}{2}$;
в) один из аргументов равен $\frac{5\pi}{2}$;
г) один из аргументов φ удовлетворяет неравенствам $2\pi < \varphi < 3\pi$;
д) один из аргументов φ удовлетворяет неравенствам $0 \leqslant \varphi < 2\pi$?

1.22. Какое множество точек комплексной плоскости задается условием

$$\arg z = (2n+1)\pi, \qquad n \in Z?$$

1.23. Среди комплексных чисел z, удовлетворяющих условию $|z + 1 - i| \leqslant 1$, найдите число, имеющее наименьший положительный аргумент.

1.24. Среди комплексных чисел z, удовлетворяющих условию $|z - 5i| \leqslant 3$, найдите число, имеющее наименьший положительный аргумент.

§ 3. Различные формы записи комплексных чисел. Операции над комплексными числами

1. Алгебраическая и тригонометрическая формы записи комплексного числа. Запись комплексного числа z в виде $a + bi$ называется *алгебраической формой записи комплексного числа.*

Помимо алгебраической формы используются и другие формы записи комплексных чисел — тригонометрическая форма и показательная форма.

Рассмотрим тригонометрическую форму записи комплексных чисел. О показательной форме записи будет рассказано в п. 6.

Действительная и мнимая части комплексного числа $z=a+bi$ выражаются через его модуль $|z|=r$ и аргумент φ следующим образом:

$$\begin{cases} a=r\cos\varphi, \\ b=r\sin\varphi. \end{cases}$$

Эта связь легко устанавливается при рассмотрении рис. 6. Комплексное число z может быть, следовательно, записано в виде

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi).$$

Здесь r — модуль комплексного числа, а φ — один (любой) из его аргументов.

Запись комплексного числа в виде

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

называется *тригонометрической формой записи.*

Тригонометрическая форма записи комплексных чисел во многих случаях оказывается более удобной, чем алгебраическая.

Для того чтобы перейти от алгебраической формы записи комплексного числа $z=a+bi$ к тригонометрической, достаточно найти его модуль и один из аргументов. Модуль определяется по формуле

$$r=\sqrt{a^2+b^2}.$$

Зная модуль r, аргумент находим из системы

$$\begin{cases} \cos\varphi=\dfrac{a}{r}, \\ \sin\varphi=\dfrac{b}{r}. \end{cases} \qquad (1)$$

Пример 1. Записать число $z=1-i$ в тригонометрической форме.

Находим модуль

$$|z|=r=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}.$$

Для аргумента φ получаем систему

$$\begin{cases} \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \sin\varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Одним из решений этой системы будет, например, $\varphi = \frac{7\pi}{4}$, и, следовательно, данное комплексное число в тригонометрической форме запишется так:

$$1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right).$$

Тригонометрической формой записи будет, очевидно, и такая запись:

$$1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Заметим, что число $1 - i$ может быть записано через значения тригонометрических функций и другими способами, например:

$$1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

или

$$1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Хотя эти представления числа $1 - i$ верны, важно понимать, что они не являются тригонометрической формой записи числа $1 - i$.

Подчеркнем еще раз, что для записи числа $a + bi$ в тригонометрической форме не нужны все решения системы (1). Достаточно знать одно решение.

Замечание 1. Для решения системы (1) во многих случаях удобно перейти к уравнению

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}. \qquad (2)$$

Это уравнение является следствием системы (1). Оно получается в результате почленного деления второго уравнения системы на первое. Каждое решение системы (1) является решением уравнения (2). Обратное утверждение неверно, и, следовательно, уравнение (2) не равно-

сильно системе (1). Но если решения уравнения (2) найдены, то выбрать из них те, которые удовлетворяют системе (1), очень просто. Для этого надо посмотреть, в каком квадранте комплексной плоскости находится точка $z=a+bi$. Из алгебраической формы записи комплексного числа это всегда легко усматривается. Рассмотрим соответствующий пример.

Пример 2. Записать число $z=-1-\sqrt{3}i$ в тригонометрической форме.

Находим модуль данного числа

$$r=|-1-\sqrt{3}i|=\sqrt{(-1)^2+(-\sqrt{3})^2}=2.$$

Аргументы числа z обязаны удовлетворять уравнению

$$\operatorname{tg}\varphi=\sqrt{3}.$$

Решения этого уравнения:

$$\varphi=\frac{\pi}{3}+\pi n, \quad n\in Z.$$

Так как число $z=-1-\sqrt{3}i$ расположено в третьем квадранте комплексной плоскости, то значения

$$\varphi=\frac{\pi}{3}+2\pi k, \quad k\in Z,$$

следует отбросить: они не удовлетворяют системе (1). В качестве аргумента числа $z=-1-\sqrt{3}i$ можно взять, например, $\varphi=\frac{\pi}{3}+\pi$.

Итак,

$$-1-\sqrt{3}i=2\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right).$$

Замечание 2. Разумеется, переходить от системы (1) к уравнению (2) следует не всегда. Например, при $a=0$ это не только не нужно, но и невозможно. В этом случае очевидно, что аргументом числа будет либо $\varphi=\frac{\pi}{2}$ (если $b>0$), либо $\varphi=\frac{3\pi}{2}$ (если $b<0$).

2. Умножение и деление комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме. Тригонометрическая форма записи комплексных чисел оказывается очень удобной при умножении и делении чисел. Пусть

$$z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1) \quad \text{и} \quad z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$$

— два числа, записанных в тригонометрической форме. Тогда

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + \\ + i \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 + i \cos\varphi_1 \sin\varphi_2),$$

или

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)). \qquad (1)$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение: *модуль произведения двух комплексных чисел равен произведению модулей этих чисел, сумма аргументов сомножителей является аргументом произведения.*

Для частного, умножая числитель и знаменатель на число $\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2$, получаем

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{r_2 (\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)} = \\ = \frac{r_1 (\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + i\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 - i\cos\varphi_1 \sin\varphi_2)}{r_2 (\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2)},$$

или

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)). \qquad (2)$$

Следовательно, *модуль частного двух комплексных чисел равен частному модулей этих чисел, разность аргументов делимого и делителя является аргументом частного.*

Пример. Записать в тригонометрической форме комплексное число

$$z = \frac{\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right)(\sqrt{3} + i)}{i - 1}.$$

Число $z_1 = \cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}$ имеет модуль, равный 1, аргумент $\varphi_1 = -\frac{\pi}{3}$; $z_2 = \sqrt{3} + i$ имеет модуль 2, аргумент $\varphi_2 = \frac{\pi}{6}$; $z_3 = i - 1$ имеет модуль $\sqrt{2}$, аргумент $\varphi_3 = \frac{3\pi}{4}$. Поэтому $|z| = \frac{|z_1| \cdot |z_2|}{|z_3|} = \frac{1 \cdot 2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$, аргумент

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3 = -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} - \frac{3\pi}{4} = -\frac{11}{12}\pi.$$

Следовательно,

$$z=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{11}{12}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{11}{12}\pi\right)\right).$$

Формула (1) позволяет дать геометрическое истолкование операции умножения комплексного числа z на комплексное число z_0. Произведение чисел z и z_0 есть вектор, который может быть получен поворотом вектора z на угол, равный аргументу числа z_0, и растяжением (сжатием) его в $|z_0|$ раз (рис. 8).

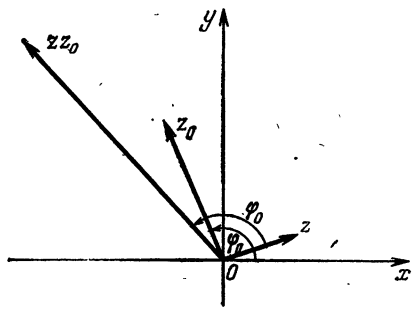


Рис. 8.

Частный случай — умножение числа z на мнимую единицу i — означает поворот вектора z против часовой стрелки на угол $\frac{\pi}{2}$.

3. Возведение в степень и извлечение корня. Формула (1) п. 2 для произведения двух комплексных чисел может быть обобщена на случай n сомножителей. Используя метод математической индукции, легко получить следующий результат:

модуль произведения n комплексных чисел равен произведению модулей всех сомножителей, сумма аргументов всех сомножителей является аргументом произведения комплексных чисел.

Отсюда как частный случай получается формула

$$(r(\cos\varphi+i\sin\varphi))^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi), \qquad (1)$$

дающая правило возведения комплексного числа $r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ в целую положительную степень:

при возведении комплексного числа в степень с натуральным показателем его модуль возводится в степень с тем же показателем, а аргумент умножается на показатель степени.

Пример 1. Возвести в девятую степень комплексное число

$$z=\sqrt{3}-i.$$

Модуль числа z равен 2, а одним из аргументов является $\varphi = -\frac{\pi}{6}$, поэтому модуль числа z^9 равен 2^9, а аргумент числа z^9 равен $9\varphi = -\frac{3}{2}\pi$. Следовательно,

$$(\sqrt{3}-i)^9 = 2^9\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)\right)=512i.$$

Перейдем к операции извлечения корня данной степени из комплексного числа.

Число z называется *корнем степени n из числа w* (обозначается $\sqrt[n]{w}$), если $z^n = w$.

Из данного определения вытекает, что каждое решение уравнения $z^n = w$ является корнем степени n из числа w. Другими словами, для того чтобы извлечь корень степени n из числа w, достаточно решить уравнение $z^n = w$.

Если $w = 0$, то при любом n уравнение $z^n = w$ имеет одно и только одно решение $z = 0$. Если $w \neq 0$, то и $z \neq 0$, а следовательно, и z и w можно представить в тригонометрической форме:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad w = s(\cos\psi + i\sin\psi).$$

Уравнение $z^n = w$ примет вид

$$r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = s(\cos\psi + i\sin\psi).$$

Два комплексных числа равны тогда и только тогда, когда равны их модули, а аргументы отличаются слагаемым, кратным 2π. Следовательно,

$$r^n = s \quad \text{и} \quad n\varphi = \psi + 2\pi k,$$

или

$$r = \sqrt[n]{s} \quad \text{и} \quad \varphi = \frac{\psi}{n} + \frac{2\pi}{n}k, \quad k \in Z.$$

Итак, все решения уравнения $z^n = w$ могут быть записаны следующим образом:

$$z_k = \sqrt[n]{s}\left(\cos\left(\frac{\psi}{n}+\frac{2\pi}{n}k\right)+i\sin\left(\frac{\psi}{n}+\frac{2\pi}{n}k\right)\right), \quad (2)$$
$$k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1.$$

В самом деле, придавая в полученной формуле числу k целые значения, отличные от выписанных ($k = 0, 1, 2, \ldots$

..., $n-1$), мы не получим других комплексных чисел. Например, при $k=n$ получаем

$$z_n=\sqrt[n]{s}\left(\cos\left(\frac{\psi}{n}+2\pi\right)+i\sin\left(\frac{\psi}{n}+2\pi\right)\right)=$$
$$=\sqrt[n]{s}\left(\cos\frac{\psi}{n}+i\sin\frac{\psi}{n}\right)=z_0.$$

Таким образом, если $w\neq 0$, то существует ровно n корней степени n из числа w; все они содержатся в формуле (2). Все корни степени n из числа w имеют один и тот же модуль $\sqrt[n]{s}$, но разные аргументы, отличающиеся слагаемым, кратным числу $\frac{2\pi}{n}$. Отсюда следует, что комплексные числа, являющиеся корнями степени n из комплексного числа w, соответствуют точкам комплексной плоскости, расположенным в вершинах правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[n]{s}$ с центром в точке $z=0$.

Сделаем еще одно замечание относительно обозначения $\sqrt[n]{w}$. Символ $\sqrt[n]{w}$ не имеет однозначного смысла. Поэтому, употребляя его, следует четко представлять себе, что под этим символом подразумевается. Например, используя запись $\sqrt{-1}$, следует позаботиться о том, чтобы было ясно, понимается ли под этим символом пара комплексных чисел i и $-i$ или одно, и если одно, то какое именно.

Пример 2. Найти все значения $\sqrt[4]{-16}$.

Запишем число $w=-16$ в тригонометрической форме:

$$w=-16=16(\cos\pi+i\sin\pi).$$

Формула (2) в нашем случае дает

$$z_k=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{4}k\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{4}k\right)\right),$$
$$k=0,\ 1,\ 2,\ 3.$$

Следовательно,

$$z_0=2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}+i\sqrt{2},$$
$$z_1=2\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}+i\sqrt{2},$$
$$z_2=2\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}-i\sqrt{2},$$
$$z_3=2\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)=\sqrt{2}-i\sqrt{2}.$$

На рис. 9 изображены все четыре значения $\sqrt[4]{-16}$. Точки, соответствующие числам z_0, z_1, z_2, z_3, находятся в вершинах квадрата, вписанного в окружность радиуса 2 с центром в точке $z=0$.

4. Квадратные уравнения. В курсе алгебры VII класса рассматривались квадратные уравнения

$$ax^2+bx+c=0, \quad a\neq 0, \tag{1}$$

с действительными коэффициентами a, b, c. Там было показано, что если дискриминант $D=b^2-4ac$ уравнения (1) неотрицателен, то решения такого уравнения даются формулой

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}. \tag{2}$$

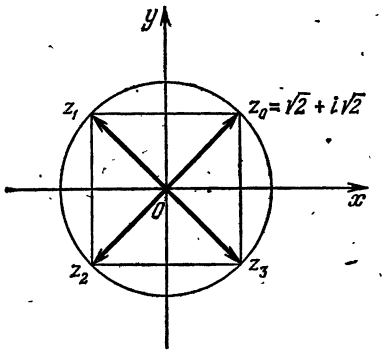


Рис. 9.

В случае, если $D<0$, говорилось, что уравнение не имеет решений.

Для вывода формулы (2) использовался прием выделения квадрата двучлена с последующим разложением левой части уравнения на линейные множители, т. е. уравнение записывалось следующим образом:

$$ax^2+bx+c=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{D}{4a^2}\right)=$$
$$=a\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)=0,$$

откуда и получалась формула (2). Очевидно, что все эти выкладки остаются справедливыми и в том случае, когда a, b, c являются комплексными числами, а корни уравнения отыскиваются в множестве комплексных чисел. Формула (2) дает, следовательно, решения квадратного уравнения и тогда, когда коэффициенты уравнения — комплексные числа. Поскольку в множестве комплексных чисел операция извлечения квадратного корня имеет смысл для любого комплексного числа, ограничение $D>0$ становится излишним. Более того, оно вообще теряет смысл, так как дискриминант D может оказаться

числом не действительным, а для таких чисел понятия «больше», «меньше» не определены. Таким образом, в множестве комплексных чисел уравнение

$$az^2+bz+c=0 \quad (a,\ b,\ c — \text{комплексные числа},\ a\neq 0)$$

всегда разрешимо

Если $D=b^2-4ac=0$, то уравнение имеет один корень; если $D\neq 0$, то уравнение имеет два корня. Во всех случаях для корней квадратного уравнения справедлива формула

$$z=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a} \qquad (3)$$

(здесь под $\sqrt{D}$ подразумеваются все значения корня).

Пример 1. Решить уравнение

$$z^2+3z+3=0.$$

По формуле (3) находим

$$z=\frac{-3+\sqrt{9-12}}{2}=\frac{-3+\sqrt{-3}}{2}.$$

Легко видеть, что $\sqrt{-3}=\pm i\sqrt{3}$, поэтому

$$z_1=-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\quad z_2=-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Пример 2. Решить уравнение

$$z^2-(2+i)z-1+7i=0.$$

По формуле (3) имеем

$$z=\frac{2+i+\sqrt{(2+i)^2+4(1-7i)}}{2}=\frac{2+i+\sqrt{7-24i}}{2}.$$

Для определения всех значений $\sqrt{7-24i}$ положим

$$\sqrt{7-24i}=x+yi.$$

Тогда

$$7-24i=x^2+2xyi-y^2$$

и, следовательно, x и y удовлетворяют системе

$$\begin{cases} x^2-y^2=7, \\ xy=-12, \end{cases}$$

причем x и y — действительные числа. Система имеет два действительных решения: $x=4$, $y=-3$ и $x=-4$, $y=3$. Поэтому

$$z_1=\frac{2+i+4-3i}{2}=3-i, \quad z_2=\frac{2+i-4+3i}{2}=-1+2i.$$

5. Комплексная степень числа e. Введем понятие комплексной степени числа e. Операция возведения числа e в комплексную степень $z=x+yi$ определяется формулой

$$e^z=e^x(\cos y+i\sin y). \qquad (1)$$

Пример 1. Возвести число e в степень z, если

а) $z=1+i$, б) $z=\frac{\pi}{2}i$, в) $z=\pi i$.

По формуле (1) находим:

а) $e^{1+i}=e(\cos 1+i\sin 1)$,

б) $e^{\frac{\pi}{2}i}=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i$,

в) $e^{\pi i}=\cos\pi+i\sin\pi=-1$.

Пример 2. Найти модуль и аргументы числа $e^z=e^{x+yi}$. Действительная и мнимая части комплексного числа e^z соответственно равны $e^x\cos y$ и $e^x\sin y$. Следовательно,

$$|e^z|=\sqrt{(e^x\cos y)^2+(e^x\sin y)^2}=\sqrt{e^{2x}}=e^x.$$

Аргументы находим из системы

$$\begin{cases}\cos\varphi=\dfrac{a}{r},\\ \sin\varphi=\dfrac{b}{r}.\end{cases}$$

Эта система в рассматриваемом случае принимает вид

$$\begin{cases}\cos\varphi=\dfrac{e^x\cos y}{e^x}=\cos y,\\ \sin\varphi=\dfrac{e^x\sin y}{e^x}=\sin y.\end{cases}$$

Ее решения $\varphi=y+2\pi n$, $n\in Z$.

Итак,

$$|e^z|=e^x,$$
$$\arg e^z=y+2\pi n,\ n\in Z.$$

Отметим основные свойства комплексной степени числа e.

1. а) $e^{z_1+z_2}=e^{z_1}e^{z_2}$, б) $e^{z_1-z_2}=\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}}$, т. е. для e^z сохраняются обычные свойства степени.

Докажем свойство а). Пусть $z_1=x_1+y_1i$, $z_2=x_2+y_2i$, тогда

$$\begin{aligned}e^{z_1}e^{z_2}&=e^{x_1}(\cos y_1+i\sin y_1)\,e^{x_2}(\cos y_2+i\sin y_2)=\\&=e^{x_1}e^{x_2}(\cos y_1\cos y_2-\sin y_1\sin y_2+\\&\quad+i(\sin y_1\cos y_2+\cos y_1\sin y_2))=\\&=e^{x_1+x_2}(\cos(y_1+y_2)+i\sin(y_1+y_2))=\\&=e^{x_1+x_2+i(y_1+y_2)}=e^{x_1+y_1i+x_2+y_2i}=e^{z_1+z_2}.\end{aligned}$$

Свойство б) доказывается аналогично.

2. Для действительных значений $z=x+0i$

$$e^z=e^{x+0i}=e^x,$$

т. е. комплексная степень числа e превращается в этом случае в степень с действительным показателем.

3. Для каждого $n\in Z$ справедливо равенство

$$e^{2\pi ni}=1.$$

В самом деле, по формуле (1) получаем

$$e^{2\pi ni}=\cos 2\pi n+i\sin 2\pi n=1.$$

4. Для любого комплексного числа z справедливо равенство

$$e^{z+2\pi ni}=e^z,\quad n\in Z.$$

Действительно, по свойству 1 можем записать

$$e^{z+2\pi ni}=e^ze^{2\pi ni}.$$

Теперь, учитывая свойство 3, получаем

$$e^{z+2\pi ni}=e^z.$$

Свойства 3 и 4 присущи только степеням с не действительными показателями.

6. Показательная форма записи комплексного числа. Положим в формуле (1) п. 5 $z=i\varphi$, $\varphi\in R$. Тогда получим

$$e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi.$$

Эта важная формула называется *формулой Эйлера.*

Ранее было показано, что каждое комплексное число $z \neq 0$ можно представить в тригонометрической форме:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Отсюда и из формулы Эйлера следует, что каждое комплексное число $z \neq 0$ можно записать и в такой форме:

$$z = re^{i\varphi}.$$

Запись комплексного числа в виде $z = re^{i\varphi}$ называется *показательной формой записи*. Здесь r — модуль комплексного числа, а φ — один (любой) из его аргументов.

Пример 1. Представить в показательной форме комплексное число

$$z = \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{1}{8}i.$$

Находим модуль числа

$$|z| = \sqrt{\frac{3}{64} + \frac{1}{64}} = \frac{1}{4}$$

и один из его аргументов

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \varphi = -\frac{\pi}{6}$$

(так как z находится в четвертом квадранте). Следовательно,

$$z = \frac{1}{4}e^{-i\frac{\pi}{6}}.$$

Показательная форма записи комплексного числа является более компактной по сравнению с тригонометрической.

Умножение и деление комплексных чисел, а также возведение в натуральную степень и извлечение корня, как правило, удобно проводить, предварительно записав комплексные числа в показательной форме.

Пусть $z_1 = r_1e^{i\varphi_1}$ и $z_2 = r_2e^{i\varphi_2}$, тогда

$$z_1z_2 = r_1e^{i\varphi_1}r_2e^{i\varphi_2} = r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}. \qquad (1)$$

Здесь мы воспользовались доказанным выше свойством 1а) комплексной степени числа e.

Используя свойство 1б), легко получаем

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1e^{i\varphi_1}}{r_2e^{i\varphi_2}}=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}. \qquad (2)$$

Пример 2. Записать в показательной форме комплексное число

$$z=\frac{(-\sqrt{3}+i)\left(\cos\frac{\pi}{12}-i\sin\frac{\pi}{12}\right)}{1-i}.$$

Каждое из чисел $-\sqrt{3}+i$, $\cos\frac{\pi}{12}-i\sin\frac{\pi}{12}$, $1-i$ представим в показательной форме:

$$-\sqrt{3}+i=2e^{i\frac{5\pi}{6}},$$

$$\cos\frac{\pi}{12}-i\sin\frac{\pi}{12}=\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)=e^{-i\frac{\pi}{12}},$$

$$1-i=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

Используя формулы (1) и (2), получаем

$$z=\frac{2e^{i\frac{5\pi}{6}}e^{-i\frac{\pi}{12}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}=\sqrt{2}e^{i\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{4}\right)}=\sqrt{2}e^{i\pi}.$$

Зная формулу Эйлера, можно переписать формулу для возведения комплексного числа в натуральную степень следующим образом:

$$(re^{i\varphi})^n=r^ne^{in\varphi}. \qquad (3)$$

Формула, дающая все решения уравнения $z^n=w$, благодаря формуле Эйлера также может быть переписана в более компактном виде:

$$z_k=\sqrt[n]{se^{i\Phi}}=\sqrt[n]{s}e^{i\left(\frac{\Phi}{n}+\frac{2\pi}{n}k\right)},\quad k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1. \qquad (4)$$

Пример 3. Представить в показательной форме комплексное число $z=(-1+i)^5$.

Записываем в показательной форме основание степени и применяем формулу (3):

$$(-1+i)^5=\left(\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)^5=4\sqrt{2}e^{i\frac{15\pi}{4}}=4\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

Пример 4. Записать все значения корня $\sqrt[4]{\sqrt{3}+i}$ в показательной форме.

Представляем число $\sqrt{3}+i$ в показательной форме и применяем формулу (4):

$$\sqrt[4]{\sqrt{3}+i}=\sqrt[4]{2e^{i\frac{\pi}{6}}}=\sqrt[4]{2}e^{i\left(\frac{\pi}{24}+\frac{\pi}{2}k\right)},\quad k=0,\ 1,\ 2,\ 3.$$

Упражнения

1.25. Представьте в тригонометрической форме комплексное число:

а) $z=\sqrt{3}-i$; б) $z=-2$; в) $z=1$;

г) $z=i^{17}$; д) $z=-\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}$;

е) $z=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$; ж) $z=1+\cos\frac{10\pi}{9}+i\sin\frac{10\pi}{9}$.

1.26. Представьте в алгебраической и в тригонометрической формах комплексное число:

а) $z=\dfrac{i\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)}{\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}}$; б) $z=\dfrac{1}{\cos\frac{4\pi}{3}-i\sin\frac{4\pi}{3}}$;

в) $z=\dfrac{i}{(1+i)^2}$; г) $z=\dfrac{-\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}}{\cos\frac{13\pi}{12}-i\sin\frac{13\pi}{12}}$;

д) $z=\dfrac{\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{i}$.

1.27. Представьте в тригонометрической форме комплексное число:

а) $z=\dfrac{5(\cos 100^\circ+i\sin 100^\circ)i}{3(\cos 40^\circ-i\sin 40^\circ)}$;

б) $z=\dfrac{\sin\frac{2\pi}{5}+i\left(1-\cos\frac{2\pi}{5}\right)}{i-1}$.

1.28. При повороте на угол $\frac{\pi}{2}$ по часовой стрелке и удлинении в два раза вектор $z_1=2+5i$ переходит в вектор z_2. Найдите комплексное число, соответствующее вектору z_2.

1.29. Вектор $z=-2+3i$ повернут на 180° и удлинен в 1,5 раза. Найдите комплексное число, соответствующее получившемуся вектору.

1.30. Запишите комплексное число в алгебраической форме:

а) $z=\left(\dfrac{\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}}{2i}\right)^3$; б) $z=\left(\dfrac{i}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{12}$;

в) $z=(\cos 31^\circ+i\sin 31^\circ)^{-10}$; г) $z=\left(\dfrac{i^8+\sqrt{3}\,i^5}{4}\right)^5$;

д) $z=\dfrac{(2i)^7}{(-\sqrt{2}+i\sqrt{2})^6}$; е) $z=\dfrac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$.

1.31. Запишите комплексное число в тригонометрической форме:

а) $z=(\sqrt{3}-i)^{100}$; б) $z=\left(\dfrac{\sqrt{3}i+1}{i-1}\right)^6$;

в) $z=\dfrac{(1+i)^{2n+1}}{(1-i)^{2n-1}}$, $n\in N$; г) $z=(\operatorname{tg}1-i)^4$;

д) $z=(\operatorname{tg}2-i)^4$; е) $z=\left(\sin\dfrac{6\pi}{5}+i\left(1+\cos\dfrac{6\pi}{5}\right)\right)^5$.

1.32. При каких целых значениях n справедливо равенство

$$(1+i)^n=(1-i)^n?$$

1.33. Найдите все значения $\sqrt[n]{w}$, если

а) $w=-i$, $n=2$;
б) $w=-1$, $n=3$;
в) $w=8i$, $n=3$;
г) $w=1$, $n=5$.

1.34. Решите уравнения:

а) $z^3-1=i$; б) $z^4-i=1$,
в) $z^5-1-i\sqrt{3}=0$; г) $z^6+64=0$.

1.35. Решите уравнения:

а) $z^2-2z+5=0$; б) $z^2-2iz-5=0$;
в) $z^2-(5+2i)z+21+i=0$;
г) $z^2-8z-3iz+13+13i=0$.

1.36. Запишите число

$$z=\frac{\sqrt{5+12i}+\sqrt{5-12i}}{\sqrt{5+12i}-\sqrt{5-12i}}$$

в алгебраической форме при условии, что действительные части $\sqrt{5+12i}$ и $\sqrt{5-12i}$ отрицательны.

1.37. Найдите корни уравнения

$$z^{10}-z^5-992=0,$$

действительные части которых отрицательны.

1.38. Представьте в алгебраической форме комплексное число:

а) $z=e^{2-i}$;

б) $z=e^{-\frac{3}{2}\pi i+12\pi i}$;

в) $z=e^{3i+7+3\pi i-\frac{\pi}{2}i}$.

1.39. Представьте в показательной форме комплексное число:

а) $z=-\sqrt{12}-2i$; б) $z=-\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}$.

1.40. Запишите в показательной и в алгебраической формах комплексное число:

а) $z=5e^{i\frac{\pi}{4}}\cdot 0{,}2e^{i\frac{\pi}{6}}\left(\cos\frac{5\pi}{12}-i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$;

б) $z=\left(\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^{-3}$; в) $z=(\sqrt{3}-i)^6$;

г) $z=\frac{1}{(\cos 12^\circ+i\sin 12^\circ)^5}$; д) $z=\frac{e^{-i\frac{\pi}{3}}(1+\sqrt{3}i)^2}{i}$.

1.41. Используя формулу (4) п. 6, найдите все значения $\sqrt[n]{w}$, если

а) $w=1$, $n=3$; б) $w=-1$, $n=4$;

в) $w=-4+\sqrt{48}\,i$, $n=3$; г) $w=-1-\sqrt{3}\,i$, $n=4$.

Глава II
НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 4. Дифференциал функции

1. Определение дифференциала функции. Согласно определению производной функции f в точке x_0 имеем

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}. \qquad (1)$$

Используя свойство предела, равенство (1) можно записать в виде

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x),$$

где $\alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Итак,

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x. \qquad (2)$$

Из формулы (2) следует, что если функция f имеет производную в точке x_0, то приращение этой функции в x_0 состоит из двух слагаемых.

Пусть $f'(x_0) \neq 0$. Тогда первое слагаемое $f'(x_0)\Delta x$ в формуле (2) пропорционально Δx, так как $f'(x_0)$ не зависит от Δx, т. е. оно линейно относительно Δx.

Поскольку $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f'(x_0)\cdot\Delta x = 0$, то первое слагаемое есть бесконечно малая при $\Delta x \to 0$. Второе слагаемое в формуле (2) также есть бесконечно малая при $\Delta x \to 0$, причем такая, что отношение $\frac{\alpha(\Delta x)\Delta x}{f'(x_0)\Delta x}$ вновь есть бесконечно малая при $\Delta x \to 0$, ибо

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(\Delta x)\Delta x}{f'(x_0)\Delta x} = 0.$$

Поэтому первое слагаемое $f'(x_0)\Delta x$ является в случае, когда $f'(x_0) \neq 0$, главной частью приращения функции в точке x_0.

Определение. Если функция $f(x)$ в точке x_0 имеет производную $f'(x_0)$, то произведение $f'(x_0)\Delta x$ называется *дифференциалом функции* f в точке x_0 и обозначается $df(x_0)$.

Таким образом,

$$df(x_0) = f'(x_0)\Delta x.$$

Заметив, что $dx = x'\Delta x = \Delta x$, определим дифференциал независимой переменной как ее приращение. Тогда получим, что дифференциал функции в точке выражается формулой

$$df(x_0) = f'(x_0)\,dx.$$

Если функция $f(x)$ имеет производную в каждой точке интервала $]a;\ b[$, то

$$df(x) = f'(x)\,dx. \qquad (3)$$

Из последнего равенства следует, что

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx},$$

т. е. производная функции есть частное от деления дифференциала этой функции на дифференциал аргумента. Формула (3) позволяет вычислять дифференциалы функций, если известны их производные. Так, например, $dc = (c)'\,dx = 0\cdot dx = 0$, где c — постоянная,

$$dx^2 = (x^2)'\,dx = 2x\,dx,$$

$$d(3x^3 + 4x + 7) = (3x^3 + 4x + 7)'\,dx = (9x^2 + 4)\,dx,$$

$$d(\sin x + x^3) = (\sin x + x^3)'\,dx = (\cos x + 3x^2)\,dx,$$

$$d(e^x + \cos 3x) = (e^x + \cos 3x)'\,dx = (e^x - 3\sin 3x)\,dx,$$

$$d\ln x = (\ln x)'dx = \frac{dx}{x}.$$

2. Геометрический смысл дифференциала. Рассмотрим дифференцируемую функцию $y = f(x)$, $x \in]a;\ b[$, график которой изображен на рис. 10.

Из $\triangle MKL$ имеем

$$|KL| = |ML|\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

Так как $|ML| = \Delta x$ и $\mathrm{tg}\,\alpha = f'(x_0)$, то $|KL| = f'(x_0)\Delta x$. Следовательно,

$$dy = |KL|,$$

Последнее равенство позволяет дать следующее геометрическое истолкование дифференциала: если функция f имеет производную в точке x_0, то дифференциал функции f в точке x_0 равен приращению ординаты касательной, проведенной к графику данной функции в точке с абсциссой x_0, при переходе от точки касания в точку с абсциссой $(x_0+\Delta x)$.

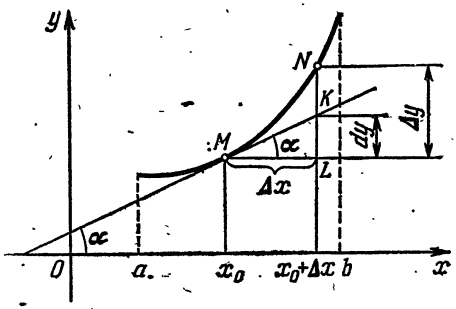


Рис. 10.

Замечание. Легко видеть (см. рис. 10), что дифференциал функции в точке, вообще говоря, не совпадает с приращением этой функции в той же точке:

$$dy \neq \Delta y, \text{ так как } |KL| \neq |NL|.$$

Однако при малых значениях Δx приращение функции приближенно равно дифференциалу функции, т. е. $\Delta y \approx dy$. Это приближение широко используется как в самой математике, так и в ее приложениях, так как оно позволяет легко вычислять приращение функции с небольшой погрешностью. Геометрически замена Δy на dy означает замену дуги кривой MN отрезком прямой MK. Следовательно, на небольшом участке изменения аргумента всякую нелинейную дифференцируемую функцию можно рассматривать как линейную.

В заключение заметим, что дифференциал линейной функции совпадает с ее приращением. В самом деле,

$$d(kx+b) = (kx+b)'\,dx = k\,dx,$$
$$\Delta(kx+b) = [k(x+\Delta x)+b] - (kx+b) = k\,\Delta x = k\,dx,$$

т. е.

$$d(kx+b) = \Delta(kx+b).$$

3. Приложение дифференциала к приближенным вычислениям. Из определения дифференциала функции в точке x_0 следует, что

$$\Delta f(x_0) - df(x_0) = \alpha(\Delta x)\,\Delta x,$$

где $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$.

Следовательно, $df(x_0)$ является приближением $\Delta f(x_0)$ в точке x_0, причем абсолютная погрешность такого приближения стремится к нулю при $\Delta x \to 0$. Более того, если $f'(x_0) \neq 0$, то относительная погрешность также стремится к нулю при $\Delta x \to 0$.

В самом деле,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left| \frac{\Delta f(x_0) - df(x_0)}{df(x_0)} \right| = \lim_{\Delta x \to 0} \left| \frac{\alpha(\Delta x)\,\Delta x}{f'(x_0)\,\Delta x} \right| = 0.$$

Все сказанное означает, что для дифференцируемой в точке x_0 функции f, у которой $f'(x_0) \neq 0$, при всех достаточно малых Δx имеет место следующая формула:

$$\Delta f(x_0) \approx df(x_0), \text{ т. е. } \Delta f(x_0) \approx f'(x_0)\,\Delta x. \qquad (1)$$

Формула (1) является основной для простейших приближенных вычислений.

Пример 1. Пусть $f(x) = \sqrt[n]{x}$, $x \in]0;\ +\infty[$.

Так как для $x \neq 0$

$$f'(x) = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{\sqrt[n]{x}}{nx},$$

то, используя формулу (1), получим для $x_0 \neq 0$ и всех достаточно малых Δx

$$\Delta f(x_0) = \sqrt[n]{x_0 + \Delta x} - \sqrt[n]{x_0} \approx \frac{\sqrt[n]{x_0}}{nx_0}\,\Delta x.$$

Таким образом, для всех достаточно малых Δx

$$\sqrt[n]{x_0 + \Delta x} \approx \sqrt[n]{x_0} + \frac{\sqrt[n]{x_0}}{nx_0}\,\Delta x. \qquad (2)$$

Пользуясь формулой (2), вычислим $\sqrt{3{,}998}$:

$$\sqrt{3{,}998} = \sqrt{4 - 0{,}002} \approx \sqrt{4} + \frac{-0{,}002 \cdot \sqrt{4}}{2 \cdot 4} =$$

$$= 2 - 0{,}0005 = 1{,}9995.$$

Для вычисления $\sqrt[5]{243{,}45}$ также воспользуемся формулой (2):

$$\sqrt[5]{243{,}45}=\sqrt[5]{243+0{,}45}\approx\sqrt[5]{243}+\frac{0{,}45\cdot\sqrt[5]{243}}{5\cdot 243}=$$

$$=3+\frac{0{,}45\cdot 3}{5\cdot 3^5}\approx 3{,}001.$$

Пример 2. Пусть $f(x)=\sin x$, $x\in R$. Известно, что $f'(x)=\cos x$. Поэтому, используя формулу (1), получим для любого $x\in R$ и всех достаточно малых Δx

$$\Delta f(x_0)=\sin(x_0+\Delta x)-\sin x_0\approx\cos x_0\,\Delta x.$$

Итак, для всех достаточно малых Δx

$$\sin(x_0+\Delta x)\approx\sin x_0+\cos x_0\Delta x. \qquad (3)$$

В частности, при $x_0=0$ из формулы (3) получим

$$\sin\Delta x\approx\Delta x$$

для всех достаточно малых Δx.

Если в формуле (3) положить $x=\frac{\pi}{4}$, то получим

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}+\Delta x\right)\approx\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\Delta x)$$

для всех достаточно малых Δx.

Пример 3. Если $f(x)=\ln x$, $x\in\,]0;\ +\infty[$, то $f'(x)=\frac{1}{x}$. Поэтому для $x_0>0$ согласно формуле (1) для всех достаточно малых Δx будем иметь

$$\Delta f(x_0)=\ln(x_0+\Delta x)-\ln x_0\approx\frac{\Delta x}{x_0},$$

т. е.

$$\ln(x_0+\Delta x)\approx\ln x_0+\frac{\Delta x}{x_0}. \qquad (4)$$

В частности, при $x_0=1$ из формулы (4) следует

$$\ln(1+\Delta x)\approx\Delta x$$

для всех достаточно малых Δx.

Упражнения

2.1. Докажите, что для всех достаточно малых значений x имеют место следующие приближенные формулы:

а) $e^x \approx 1+x$; б) $\operatorname{tg} x \approx x$; в) $\arcsin x \approx x$; г) $\operatorname{arctg} x \approx x$.

2.2. Найдите приближенные значения:

а) $\sqrt{9{,}02}$; б) $\sqrt[3]{3}$; в) $\sqrt[3]{24}$; г) $\sqrt[3]{30}$; д) $\sqrt[4]{3}$; е) $\sqrt[4]{90}$.

2.3. Вычислите приближенно:

а) $\sqrt[3]{65}$; б) $\sqrt[10]{1000}$; в) $\sqrt[3]{125{,}1324}$;

г) $\sin 29°$; д) $\ln 1{,}05$; е) $\cos 91°$;

ж) $\operatorname{tg} 44°$; з) $\ln(e+0{,}1)$; и) $\ln 0{,}97$.

§ 5. Неопределенный интеграл и его свойства

1. Первообразная и неопределенный интеграл. В дифференциальном исчислении мы решали задачу нахождения производной или дифференциала заданной функции. Практика показывает, что часто приходится по заданной производной $F'(x)=f(x)$ или, что то же, по заданному дифференциалу $dF(x)=f(x)\,dx$, находить функцию, от которой была взята производная, т. е. решать задачу, обратную задаче дифференцирования. Например, если нам известна скорость v движения материальной точки, т. е. $v=v(t)$, $t\in[a;\ b]$, а мы должны узнать путь s, пройденный этой точкой, то, зная, что $\frac{ds}{dt}=v$, мы как раз и должны будем по заданной производной $\frac{ds}{dt}=v(t)$, или $ds=v(t)\,dt$, найти функцию s. Нахождение функции по ее производной или дифференциалу рассматривается в интегральном исчислении. Функцию, восстанавливаемую по заданной ее производной или дифференциалу, называют *первообразной*.

Определение. Дифференцируемая функция $F(x)$, $x\in]a;\ b[$, называется *первообразной функцией* (или просто *первообразной*) для функции $f(x)$ на интервале $]a;\ b[$, если $F'(x)=f(x)$ для каждого $x\in]a;\ b[$.

Замечание. Для функций, имеющих производную на отрезке, понятие первообразной вводится аналогично.

Для функции $f(x)=3x^2$, $x\in R$, первообразной во всех точках действительной оси будет функция $F(x)=x^3$, так как $F'(x)=3x^2=f(x)$ для каждого $x\in R$. Заметим, что $F_1(x)=x^3+1$, или $F_2(x)=x^3-5$, или

вообще $F_8(x)=x^3+C$, где C — произвольная константа, являются первообразными для функции $f(x)=3x^2$, $x\in R$, так как эти функции имеют одну и ту же производную, равную $3x^2$.

Рассмотренный пример показывает, что функция, имеющая первообразную, имеет их бесконечное множество. Покажем, как найти все первообразные заданной функции, зная одну из них.

Теорема. *Если функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$, $x\in\,]a;\ b[$, то множество всех первообразных для функции f задается формулой $F(x)+C$, $C\in R$.*

Доказательство. Легко видеть, что любая функция вида $F(x)+C$, где C — некоторая постоянная, является первообразной для $f(x)$. Действительно,

$$(F(x)+C)'=F'(x)=f(x).$$

Докажем теперь, что любая первообразная для f представима в виде $F(x)+C$, где C — некоторое число.

Пусть $\Phi(x)$ — первообразная для $f(x)$, т. е. $\Phi'(x)=f(x)$ для каждого $x\in\,]a;\ b[$. Рассмотрим вспомогательную функцию $\varphi(x)=\Phi(x)-F(x)$, $x\in\,]a;\ b[$, и покажем, что она является постоянной.

Пусть x_1 и x_2 — две произвольные точки интервала $]a;\ b[$, и пусть, например, $x_1<x_2$. По теореме Лагранжа найдется точка $\xi\in\,]x_1;\ x_2[$ такая, что

$$\varphi(x_2)-\varphi(x_1)=\varphi'(\xi)(x_2-x_1).$$

Так как $\varphi'(x)=\Phi'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0$ для всех $x\in\,]a;\ b[$ и, в частности, $\varphi'(\xi)=0$, то $\varphi(x_2)=\varphi(x_1)$. Итак, $\varphi(x_2)=\varphi(x_1)$ для любых x_1 и x_2 из $]a;\ b[$.

Следовательно, $\varphi(x)=C$, где C — некоторое число, т. е.

$$\Phi(x)=F(x)+C,\ x\in\,]a;\ b[,$$

что и доказывает теорему.

Совокупность всех первообразных функции $f(x)$ на интервале $]a;\ b[$ называется *неопределенным интегралом* от функции f на интервале $]a;\ b[$ и обозначается символом

$$\int f(x)\,dx. \qquad (1)$$

Этот символ читается: «интеграл от эф от икс по дэ икс». Символ $\int$ называется *знаком интеграла*, $f(x)$ — *подынтегральной функцией*, $f(x)\,dx$ — *подынтегральным выражением*, x — *переменной интегрирования*.

Если $F(x)$, $x \in]a;\ b[$, — какая-нибудь первообразная функции $f(x)$ на интервале $]a;\ b[$, то пишут

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \qquad (2)$$

где C — произвольная константа.

Нахождение функции по ее производной или по ее дифференциалу называется *интегрированием функции*. Интегрирование — действие, обратное дифференцированию. Правильность интегрирования проверяется дифференцированием. Например,

$$\int (2x+3)\,dx = x^2 + 3x + C,$$

так как

$$(x^2 + 3x + C)' = 2x + 3.$$

2. Основные свойства неопределенного интеграла. Будем предполагать, что все функции в каждой из формул 1—6 определены на одном и том же интервале и имеют на этом интервале первообразные.

1. $\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$.
2. $d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx$.
3. $\int f'(x)\,dx = f(x) + C$.
4. $\int df(x) = f(x) + C$.
5. $\int af(x)dx = a\int f(x)\,dx$, где $a \neq 0$ — постоянная.
6. $\int (f(x) \pm \varphi(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int \varphi(x)\,dx$.

Справедливость свойств 1—4 легко усматривается из определения интеграла. В самом деле, пусть F — одна из первообразных функции f, тогда по определению

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

где $F'(x)=f(x)$ или $dF(x)=f(x)\,dx$. Следовательно,

$$\left(\int f(x)\,dx\right)'=(F(x)+C)'=F'(x)=f(x),$$

$$d\left(\int f(x)\,dx\right)=d(F(x)+C)=dF(x)=f(x)\,dx.$$

Свойства 1 и 2 доказаны. Докажем свойства 3 и 4. Так как $df(x)=f'(x)\,dx$ и f является первообразной для своей производной f', то по определению

$$\int df(x)=\int f'(x)\,dx=f(x)+C.$$

Аналогично доказываются свойства 5 и 6.

3. Таблица неопределенных интегралов. Из определения интеграла следует, что всякая формула для производной конкретной функции, т. е. формула вида $F'(x)=f(x)$, может быть записана в виде интегральной формулы:

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C.$$

Используя это соображение и таблицу производных, составим таблицу неопределенных интегралов

1. $\int 0\,dx=C$, C — константа.
2. $\int dx=x+C$.
3. $\int x^{\alpha}dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$, $\alpha\neq-1$.
4. $\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C$.
5. $\int a^x\,dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$, $a>0$, $a\neq1$.

В частности, $\int e^x\,dx=e^x+C$.

6. $\int\cos x\,dx=\sin x+C$.
7. $\int\sin x\,dx=-\cos x+C$.
8. $\int\frac{dx}{\cos^2 x}=\operatorname{tg}x+C$.
9. $\int\frac{dx}{\sin^2 x}=-\operatorname{ctg}x+C$.
10. $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C$, $|x|<a$.

11. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0.$

12. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C, \quad a \neq 0.$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C, \quad a \neq 0,$

причем если под корнем стоит выражение $x^2 - a^2$, то предполагается $|x| > |a|$.

Заметим, что формулы 4, 8, 9, 10, 12, 13 справедливы лишь для тех значений x, при которых не происходит обращения в нуль знаменателя. Справедливость каждой из приведенных формул можно установить дифференцированием. Проверим, например, формулу 4.

Здесь надо рассмотреть два случая:

1) Пусть $x > 0$, тогда $|x| = x$ и формула 4 примет вид

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C.$$

Дифференцируя, получим

$$(\ln x + C)' = \frac{1}{x} + 0 = \frac{1}{x}.$$

2) Пусть $x < 0$, тогда $|x| = -x$ и формула 4 имеет вид

$$\int \frac{dx}{x} = \ln(-x) + C.$$

Дифференцируя, будем иметь

$$(\ln(-x) + C)' = \frac{-1}{-x} + 0 = \frac{1}{x}.$$

Интегралы, приведенные в рассмотренной выше таблице, получили название *табличных интегралов.*

§ 6. Методы интегрирования

1. Примеры непосредственного интегрирования. *Непосредственным интегрированием* называется такой метод вычисления интегралов, при котором они сводятся к табличным путем применения к ним основных свойств неопределенных интегралов.

Пример 1.

$$\int (3x^2+x+1)\,dx=\int 3x^2\,dx+\int x\,dx+\int dx=$$
$$=3\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+C=x^3+\frac{x^2}{2}+x+C.$$

Пример 2.

$$\int\frac{(2+x)\,dx}{x}=\int\frac{2\,dx}{x}+\int\frac{x\,dx}{x}=2\int\frac{dx}{x}+\int dx=2\ln|x|+x+C.$$

Пример 3.

$$\int\frac{x^2\,dx}{4+3x^3}=\frac{1}{9}\int\frac{d\,(4+3x^3)}{4+3x^3}=\frac{1}{9}\ln|4+3x^3|+C.$$

Пример 4.

$$\int\cos^2 x\,dx=\int\frac{1+\cos 2x}{2}\,dx=\frac{1}{2}\int(1+\cos 2x)\,dx=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\int dx+\int\cos 2x\,dx\right)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)+C=$$
$$=\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}+C.$$

Пример 5.

$$\int e^{7x}\,dx=\frac{1}{7}\int e^{7x}\,d(7x)=\frac{1}{7}e^{7x}+C.$$

Пример 6.

$$\int\frac{x^2\,dx}{3+x^2}=\int\frac{3+x^2-3}{3+x^2}\,dx=\int\frac{3+x^2}{3+x^2}\,dx+\int\frac{-3\,dx}{3+x^2}=$$
$$=\int dx-3\int\frac{dx}{3+x^2}=x-3\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}+C=$$
$$=x-\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}+C.$$

Пример 7.

$$\int 3^x\cdot 4^{2x}\,dx=\int(3\cdot 16)^x\,dx=\int 48^x\,dx=\frac{48^x}{\ln 48}+C.$$

Пример 8.

$$\int\frac{dx}{25+4x^2}=\int\frac{dx}{4\left(\frac{25}{4}+x^2\right)}=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{\left(\frac{5}{2}\right)^2+x^2}=$$
$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\frac{5}{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\frac{5}{2}}+C=\frac{1}{10}\operatorname{arctg}\frac{2x}{5}+C.$$

Пример 9.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{9\left(\frac{1}{9}-x^2\right)}} =$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 - x^2}} = \frac{1}{3}\arcsin\frac{x}{\frac{1}{3}} + C = \frac{1}{3}\arcsin 3x + C.$$

Пример 10.

$$\int \frac{dx}{3x^2-5} = \int \frac{dx}{3\left(x^2-\frac{5}{3}\right)} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2-\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{5}{3}}}\cdot \ln\left|\frac{x-\sqrt{\frac{5}{3}}}{x+\sqrt{\frac{5}{3}}}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{15}}\cdot \ln\left|\frac{x-\sqrt{\frac{5}{3}}}{x+\sqrt{\frac{5}{3}}}\right| + C.$$

Пример 11.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{7x^2-8}} = \int \frac{dx}{\sqrt{7\left(x^2-\frac{8}{7}\right)}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{7}}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-\frac{8}{7}}} = \frac{1}{\sqrt{7}}\ln\left|x+\sqrt{x^2-\frac{8}{7}}\right| + C.$$

Пример 12. Вычислить

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos x}.$$

Решение. Так как $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, то

$$\frac{1}{\sin x \cos x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Поэтому

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx + \int \frac{\cos x}{\sin x}dx =$$

$$= \int \frac{-d(\cos x)}{\cos x} + \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} =$$

$$= -\ln|\cos x| + \ln|\sin x| + C = \ln|\operatorname{tg} x| + C.$$

Пример 13. Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{11+10x-x^2}}.$$

Решение. Так как $11+10x-x^2=36-25+10x-x^2=$ $=36-(x-5)^2$, то

$$\int \frac{dx}{\sqrt{11+10x-x^2}}=\int \frac{dx}{\sqrt{36-(x-5)^2}}=\int \frac{d(x-5)}{\sqrt{6^2-(x-5)^2}}=$$

$$=\arcsin\frac{x-5}{6}+C.$$

Пример 14. Вычислить интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{17-4x-x^2}}.$$

Решение. Так как $17-4x-x^2=21-4-4x-x^2=$ $=21-(x+2)^2$, то

$$\int \frac{dx}{\sqrt{17-4x-x^2}}=\int \frac{dx}{\sqrt{21-(x+2)^2}}=$$

$$=\int \frac{d(x+2)}{\sqrt{21-(x+2)^2}}=\arcsin\frac{x+2}{\sqrt{21}}+C.$$

Вообще при вычислении интегралов полезно соответствующим образом преобразовать подынтегральное выражение, а затем воспользоваться таблицей неопределенных интегралов.

При вычислении интегралов вида

$$\int \sin mx\cos nx\,dx, \quad \int \sin mx\sin nx\,dx$$

и

$$\int \cos mx\cos nx\,dx$$

удобно использовать следующие тригонометрические формулы, преобразующие произведение в алгебраическую сумму:

$$\sin mx\cos nx=\frac{1}{2}(\sin(m-n)x+\sin(m+n)x),$$

$$\sin mx\sin nx=\frac{1}{2}(\cos(m-n)x-\cos(m+n)x),$$

$$\cos mx\cos nx=\frac{1}{2}(\cos(m-n)x+\cos(m+n)x).$$

Пример 15.

$$\int \sin 3x \cos 2x\, dx =$$
$$= \int \frac{1}{2} (\sin (3-2)x + \sin (3+2)x)\, dx =$$
$$= \frac{1}{2} \int \sin x\, dx + \frac{1}{2} \int \sin 5x\, dx =$$
$$= \frac{1}{2} (-\cos x) + \frac{1}{2 \cdot 5} \int \sin 5x\, d(5x) =$$
$$= -\frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{10} \cos 5x + C.$$

Пример 16.

$$\int \sin 4x \sin 5x\, dx = \int \frac{1}{2} (\cos (-x) - \cos 9x)\, dx =$$
$$= \frac{1}{2} \int \cos x\, dx - \frac{1}{2} \int \cos 9x\, dx =$$
$$= \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{2 \cdot 9} \int \cos 9x\, d(9x) = \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{18} \sin 9x + C.$$

Пример 17.

$$\int \cos 3x \cos 5x\, dx = \int \frac{1}{2} (\cos (-2x) + \cos 8x)\, dx =$$
$$= \frac{1}{2} \int \cos 2x\, dx + \frac{1}{2} \int \cos 8x\, dx =$$
$$= \frac{1}{2 \cdot 2} \int \cos 2x\, d(2x) + \frac{1}{2 \cdot 8} \int \cos 8x\, d(8x) =$$
$$= \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{16} \sin 8x + C.$$

2, Интегрирование методом замены переменной (метод подстановки). В основе метода подстановки (или метода замены переменной) вычисления неопределенных интегралов лежит следующее утверждение, являющееся следствием правила дифференцирования сложной функции:

пусть даны функции $f(x)$, $x \in]a; b[$, *и* $\varphi(t)$, $t \in]c; d[$, *и пусть существует сложная функция* $f(\varphi(t))$, $t \in]c; d[$. *Если функция* $f(x)$ *имеет первообразную* $F(x)$, *а функция* $\varphi(t)$ *дифференцируема, то функция* $F(\varphi(t))$ *является первообразной для функции* $f(\varphi(t))\varphi'(t)$, $t \in]c; d[$, *и поэтому*

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt = F(\varphi(t)) + C.$$

Пример 1. Вычислить интеграл $\int \cos 5x\, dx$.

Решение. Сделаем замену переменной $t=5x$, тогда $x=\frac{t}{5}$ и $dx=\frac{dt}{5}$. Следовательно,

$$\int \cos 5x\, dx=\int \cos t \frac{dt}{5}=\frac{1}{5}\int \cos t\, dt=$$

$$=\frac{1}{5}\sin t+C=\frac{1}{5}\sin 5x+C.$$

Пример 2. Вычислить интеграл $\int \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}\, dx$.

Решение. Положим $t=\frac{1}{x}$, тогда $x=\frac{1}{t}$ и $dx=$ $=-\frac{dt}{t^2}$. Таким образом,

$$\int \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}\, dx=\int t^2 e^t \left(-\frac{dt}{t^2}\right)=-\int e^t\, dt=$$

$$=-e^t+C=-e^{\frac{1}{x}}+C.$$

Пример 3. Вычислить интеграл $\int x\sqrt{1-x^2}\, dx$.

Решение. Сделаем подстановку $t=1-x^2$, тогда $dt=-2x\, dx$, т. е. $x\, dx=-\frac{dt}{2}$. Поэтому

$$\int x\sqrt{1-x^2}\, dx=\int \sqrt{t}\left(-\frac{dt}{2}\right)=-\frac{1}{2}\int \sqrt{t}\, dt=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{t^{1+\frac{1}{2}}}{1+\frac{1}{2}}+C=-\frac{1}{3}t^{3/2}+C=-\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2}+C.$$

Пример 4. Найти интеграл $\int \frac{(\arcsin x)^2\, dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Решение. Положим $t=\arcsin x$, тогда $dt=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Таким образом,

$$\int \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int t^2\, dt=\frac{t^3}{3}+C=\frac{(\arcsin x)^3}{3}+C.$$

Пример 5. Вычислить интеграл $\int \frac{2x\,(\arccos x^2)^3\, dx}{\sqrt{1-x^4}}$

Решение. Положим $t=\arccos x^2$, тогда

$$dt=-\frac{2x\,dx}{\sqrt{1-x^4}}.$$

Поэтому

$$\int\frac{2x\,(\arccos x^2)^3\,dx}{\sqrt{1-x^4}}=-\int t^3\,dt=-\frac{t^4}{4}+C=$$

$$=-\frac{1}{4}(\arccos x^2)^4+C.$$

Пример 6. Вычислить интеграл $\int\sin x\cos^7 x\,dx$.

Решение. Положим $t=\cos x$, тогда $dt=-\sin x\,dx$. Следовательно,

$$\int\sin x\cos^7 x\,dx=-\int t^7\,dt=-\frac{t^8}{8}+C=-\frac{\cos^8 x}{8}+C.$$

Пример 7. Найти интеграл $\int\frac{e^{\sqrt{x}}}{3\sqrt{x}}\,dx$.

Решение. Рассмотрим подстановку $t=\sqrt{x}$. Тогда $dt=\frac{dx}{2\sqrt{x}}$ и $\frac{dx}{\sqrt{x}}=2\,dt$. Таким образом,

$$\int\frac{e^{\sqrt{x}}}{3\sqrt{x}}\,dx=\frac{2}{3}\int e^t\,dt=\frac{2}{3}e^t+C=\frac{2}{3}e^{\sqrt{x}}+C.$$

Пример 8. Вычислить интеграл $\int\sqrt{4-x^2}\,dx$ $(|x|\leqslant 2)$.

Решение. Положим $x=2\sin t\left(|t|\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$, или $\sin t=\frac{x}{2}$, тогда $dx=2\cos t\,dt$ и $t=\arcsin\frac{x}{2}$. Следовательно,

$$\sqrt{4-x^2}=\sqrt{4-4\sin^2 t}=2\sqrt{1-\sin^2 t}=2\cos t.$$

Таким образом,

$$\int\sqrt{4-x^2}\,dx=\int 2\cos t\cdot 2\cos t\,dt=4\int\cos^2 t\,dt=$$

$$=2\int(1+\cos 2t)\,dt=2t+\sin 2t+C.$$

Так как

$$\sin 2t=2\sin t\cos t=2\sin t\sqrt{1-\sin^2 t}=$$

$$=2\cdot\frac{x}{2}\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2},$$

то

$$\int \sqrt{4-x^2}\,dx = 2\arcsin\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + C.$$

3. Интегрирование по частям. Согласно правилу дифференцирования произведения имеем

$$d(uv) = v\,du + u\,dv.$$

Поэтому

$$u\,dv = d(uv) - v\,du.$$

Если производные (или, что то же,— дифференциалы) двух функций равны, то их неопределенные интегралы совпадают. Поэтому

$$\int u\,dv = \int d(uv) - \int v\,du.$$

Используя свойство 4 неопределенных интегралов:

$$\int d(uv) = uv + C,$$

получим формулу

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du. \qquad (1)$$

Эта формула называется *формулой интегрирования по частям*.

Пример 1. Вычислить интеграл $\int xe^x\,dx$.

Решение. Положим

$$u = x, \quad dv = e^x\,dx,$$

тогда

$$du = dx, \quad v = e^x.$$

Таким образом, используя формулу (1), будем иметь

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C.$$

Пример 2. Найти интеграл $\int \ln x\,dx$.

Решение. Положим

$$u = \ln x, \quad dv = dx,$$

тогда

$$du = \frac{dx}{x}, \quad v = x.$$

Отсюда, согласно формуле (1),

$$\int \ln x\, dx = x \ln x - \int x \frac{dx}{x} = x \ln x - \int dx =$$
$$= x \ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C.$$

Пример 3. Вычислить интеграл $\int x \cos x\, dx$.

Решение. Положим

$$u = x, \quad dv = \cos x\, dx,$$

тогда

$$du = dx, \quad v = \sin x.$$

Поэтому, используя формулу (1), имеем

$$\int x \cos x\, dx = x \sin x - \int \sin x\, dx = x \sin x + \cos x + C.$$

Пример 4. Найти интеграл $\int (\arcsin x)^2\, dx$.

Решение. Положим

$$u = (\arcsin x)^2, \quad dv = dx,$$

тогда

$$du = \frac{2 \arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx, \quad v = x.$$

Следовательно, используя формулу (1), получим

$$\int (\arcsin x)^2\, dx = x (\arcsin x)^2 - \int \frac{2x \arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx.$$

Для нахождения последнего интеграла еще раз применим метод интегрирования по частям.

Положим

$$u = \arcsin x, \quad dv = \frac{-x\, dx}{\sqrt{1 - x^2}},$$

тогда

$$du = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad v = \sqrt{1 - x^2}.$$

Поэтому

$$\int \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin x\,dx = \sqrt{1-x^2}\arcsin x - \int dx =$$

$$= \sqrt{1-x^2}\arcsin x - x + C.$$

Итак,

$$\int (\arcsin x)^2 dx = x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2x + C.$$

При использовании формулы интегрирования по частям для нахождения интегралов от произведения трудно дать общее правило для определения того, какой сомножитель в подынтегральном выражении следует обозначать через u и какой через dv. Вместе с тем при нахождении интегралов необходимо, чтобы dx обязательно входило в выражение для dv и это выражение было легко интегрируемым, а также чтобы интеграл $\int v\,du$ был проще исходного. Так, например, для интегралов вида $\int P(x)e^{ax}\,dx$, $\int P(x)\sin mx\,dx$, $\int P(x)\cos mx\,dx$ за u принимается многочлен $P(x)$, а для интегралов вида $\int P(x)\ln x\,dx$, $\int P(x)\operatorname{arctg} x\,dx$, $\int P(x)\arcsin x\,dx$ за u принимается соответственно $\ln x$, $\operatorname{arctg} x$, $\arcsin x$.

Если в интегралах первого вида многочлен $P(x)$ выше первой степени, то операцию интегрирования по частям следует применять несколько раз.

Пример 5. Найти интеграл $\int (x^2-5x+3)\sin 4x\,dx$.

Решение. Положим $u = x^2-5x+3$ и $dv = \sin 4x\,dx$, тогда $du = (2x-5)\,dx$ и $v = -\frac{1}{4}\cos 4x$. Поэтому

$$\int (x^2-5x+3)\sin 4x\,dx =$$

$$= -\frac{x^2-5x+3}{4}\cos 4x + \frac{1}{4}\int (2x-5)\cos 4x\,dx.$$

Последний интеграл найдем интегрированием по частям.

Полагаем теперь $u = 2x-5$ и $dv = \cos 4x\,dx$, тогда $du = 2dx$ и $v = \frac{1}{4}\sin 4x$.

Следовательно,

$$\int (2x-5)\cos 4x\,dx = \frac{2x-5}{4}\sin 4x - \frac{1}{2}\int \sin 4x\,dx =$$

$$= \frac{2x-5}{4}\sin 4x + \frac{1}{8}\cos 4x + C.$$

Таким образом,

$$\int (x^2-5x+3)\sin 4x\,dx =$$

$$= -\frac{x^2-5x+3}{4}\cos 4x + \frac{2x-5}{16}\sin 4x + \frac{1}{32}\cos 4x + C =$$

$$= \frac{-8x^2+40x-23}{32}\cos 4x + \frac{2x-5}{16}\sin 4x + C.$$

Пример 6. Найти интеграл $\int x\,\mathrm{arctg}\,x\,dx$.

Решение. Положим $u = \mathrm{arctg}\,x$ и $dv = x\,dx$, тогда $du = \frac{dx}{1+x^2}$ и $v = \frac{x^2}{2}$. Следовательно,

$$\int x\,\mathrm{arctg}\,x\,dx = \frac{x^2}{2}\,\mathrm{arctg}\,x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2\,dx}{1+x^2}.$$

Вычислим отдельно последний интеграл:

$$\int \frac{x^2\,dx}{1+x^2} = \int \frac{1+x^2-1}{1+x^2}\,dx = \int dx - \int \frac{dx}{1+x^2} = x - \mathrm{arctg}\,x + C.$$

Итак,

$$\int x\,\mathrm{arctg}\,x\,dx = \frac{x^2}{2}\,\mathrm{arctg}\,x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,x + C =$$

$$= \frac{x^2+1}{2}\,\mathrm{arctg}\,x - \frac{x}{2} + C.$$

Формула интегрирования по частям применима и для нахождения интегралов вида $\int e^{ax}\sin bx\,dx$ и $\int e^{ax}\cos bx\,dx$. При нахождении указанных интегралов формула интегрирования по частям применяется последовательно два раза, причем оба раза за u выбирается либо показательная функция, либо тригонометрическая. После двукратного интегрирования по частям получается линейное уравнение относительно искомого интеграла.

Пример 7. Вычислить интеграл $\int e^{3x}\sin 2x\,dx$.

Решение. Положим $u=e^{3x}$ и $dv=\sin 2x\,dx$, откуда $du=3e^{3x}\,dx$ и $v=-\frac{1}{2}\cos 2x$. Поэтому

$$\int e^{3x}\sin 2x\,dx=-\frac{1}{2}e^{3x}\cos 2x+\frac{3}{2}\int e^{3x}\cos 2x\,dx. \qquad (2)$$

Для нахождения последнего интеграла применим еще раз формулу интегрирования по частям:

$$u=e^{3x} \quad \text{и} \quad dv=\cos 2x\,dx;$$
$$du=3e^{3x}\,dx \quad \text{и} \quad v=\frac{1}{2}\sin 2x.$$

Тогда

$$\int e^{3x}\cos 2x\,dx=\frac{1}{2}e^{3x}\sin 2x-\frac{3}{2}\int e^{3x}\sin 2x\,dx.$$

Подставив это выражение в равенство (2), получим

$$\int e^{3x}\sin 2x\,dx=$$
$$=-\frac{1}{2}e^{3x}\cos 2x+\frac{3}{4}e^{3x}\sin 2x-\frac{9}{4}\int e^{3x}\sin 2x\,dx.$$

Следовательно,

$$\int e^{3x}\sin 2x\,dx=-\frac{2}{13}e^{3x}\cos 2x+\frac{3}{13}e^{3x}\sin 2x+C.$$

Рассмотрим еще один случай использования формулы интегрирования по частям на примере нахождения интеграла вида $\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx$.

Пример 8. Найти интеграл $\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx$.

Решение. Положим $u=\sqrt{x^2+a^2}$ и $dv=dx$, тогда

$$du=\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}} \quad \text{и} \quad v=x.$$

Следовательно,

$$\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx=x\sqrt{x^2+a^2}-\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}}. \qquad (3)$$

Так как

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}=\frac{(x^2+a^2)-a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}=\sqrt{x^2+a^2}-\frac{a^2}{\sqrt{x^2+a^2}},$$

то

$$\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx-a^2\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=$$

$$=\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx-a^2\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|.$$

Подставив полученное выражение в равенство (3), будем иметь

$$\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx=x\sqrt{x^2+a^2}-\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx+$$

$$+a^2\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|.$$

Таким образом,

$$\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+C.$$

Аналогично можно вычислять интеграл вида $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$.

4. Интегрирование некоторых рациональных функций. Рассмотрим сначала интегралы вида

$$\int\frac{dx}{x^2+px+q}$$

Для нахождения указанных интегралов необходимо сначала преобразовать знаменатель x^2+px+q в разность квадратов (если $p^2-4q>0$) или в сумму квадратов (если $p^2-4q<0$), а затем воспользоваться таблицей неопределенных интегралов.

Пример 1. Найти интеграл $\int\frac{dx}{x^2+8x+7}$.

Решение. Так как $p^2-4q=64-28=36>0$, то $x^2+8x+7=(x+4)^2-9$. Поэтому

$$\int\frac{dx}{x^2+8x+7}=\int\frac{dx}{(x+4)^2-9}=\int\frac{d(x+4)}{(x+4)^2-9}=$$

$$=\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x+4-3}{x+4+3}\right|+C=\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x+1}{x+7}\right|+C.$$

Пример 2. Найти интеграл $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$.

Решение. Так как $p^2-4q=4-20=-16<0$, то $x^2+2x+5=(x+1)^2+4$. Следовательно,

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+5}=\int \frac{dx}{(x+1)^2+4}=\int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+4}=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}+C.$$

Рассмотрим теперь интегралы вида

$$\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}dx,$$

где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ — многочлены, n и m $(n<m)$ — степени многочленов. Для вычисления таких интегралов необходимо представить дробь $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ в виде суммы более простых дробей. Не останавливаясь на решении этой задачи в общем виде, рассмотрим ряд частных случаев.

Пример 3. Найти интеграл $\int \frac{x\,dx}{x^2-5x+6}$.

Решение. Так как корнями знаменателя являются $x_1=2$ и $x_2=3$, то знаменатель раскладывается на множители

$$x^2-5x+6=(x-2)(x-3).$$

Представим теперь дробь в виде следующей суммы:

$$\frac{x}{x^2-5x+6}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3},$$

и найдем коэффициенты A и B. Приведем дроби в правой части к общему знаменателю:

$$\frac{x}{x^2-5x+6}=\frac{A(x-3)+B(x-2)}{(x-2)(x-3)}.$$

Так как это — тождество, то, приравняв числители, получим

$$x=A(x-3)+B(x-2)$$

или

$$x=(A+B)x-3A-2B.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях тождества, составим систему урав-

нений

$$\begin{cases} A+B=1, \\ -3A-2B=0. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим $A=-2$, $B=3$.

Таким образом,

$$\frac{x}{x^2-5x+6}=\frac{-2}{x-2}+\frac{3}{x-3}.$$

Итак,

$$\int \frac{x\,dx}{x^2-5x+6}=-2\int \frac{dx}{x-2}+3\int \frac{dx}{x-3}= \\ =-2\ln|x-2|+3\ln|x-3|+C.$$

Пример 4. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{x^3-1}$.

Решение. Так как $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$, то представим дробь в виде следующей суммы:

$$\frac{1}{x^3-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1},$$

т. е.

$$\frac{1}{x^3-1}=\frac{A(x^2+x+1)+(Bx+C)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

или

$$\frac{1}{x^3-1}=\frac{(A+B)x^2+(A-B+C)x+(A-C)}{(x-1)(x^2+x+1)}.$$

Итак,

$$1=(A+B)x^2+(A-B+C)x+(A-C).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях тождества, составим систему уравнений

$$\begin{cases} A+B=0, \\ A-B+C=0, \\ A-C=1. \end{cases}$$

Решив систему, получим $A=\frac{1}{3}$, $B=-\frac{1}{3}$, $C=-\frac{2}{3}$.

Следовательно,

$$\int \frac{dx}{x^3-1} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{3}\int \frac{x+2}{x^2+x+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+x+1} =$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\int \frac{d(x^2+x+1)}{x^2+x+1} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

Пример 5. Найти интеграл $\int \frac{(x-1)\,dx}{x^2(x-2)(x+1)^2}$.

Решение. Найдем разложение подынтегральной дроби на простейшие:

$$\frac{x-1}{x^2(x-2)(x+1)^2} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x-2} + \frac{D}{(x+1)^2} + \frac{E}{x+1}.$$

Приведем правую часть к общему знаменателю и приравняем числители:

$$x-1 = A(x-2)(x+1)^2 + Bx(x-2)(x+1)^2 + Cx^2(x+1)^2 + Dx^2(x-2) + Ex^2(x+1)(x-2).$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях тождества, получим систему уравнений

$$\begin{cases} B+C+E=0, \\ A+2C+D-E=0, \\ -3B+C-2D-2E=0, \\ -3A-2B=1, \\ -2A=-1. \end{cases}$$

Решив систему, получим $A=\frac{1}{2}$, $B=-\frac{5}{4}$, $C=\frac{1}{36}$, $D=\frac{2}{3}$, $E=\frac{11}{9}$.

Таким образом,

$$\int \frac{(x-1)\,dx}{x^2(x-2)(x+1)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2} - \frac{5}{4}\int \frac{dx}{x} + \frac{1}{36}\int \frac{dx}{x-2} + \frac{2}{3}\int \frac{dx}{(x+1)^2} + \frac{11}{9}\int \frac{dx}{x+1} =$$

$$= -\frac{1}{2x} - \frac{5}{4}\ln|x| + \frac{1}{36}\ln|x-2| - \frac{2}{3(x+1)} + \frac{11}{9}\ln|x+1| + C.$$

5. Примеры «неберущихся» интегралов. Выше мы познакомились с некоторыми приемами вычисления неопределенных интегралов. Заметим, что не у всякой элементарной функции первообразная есть элементарная функция. В том случае, когда первообразная некоторой элементарной функции f является элементарной функцией, говорят, что интеграл $\int f(x)\,dx$ выражается через элементарные функции или что этот интеграл вычисляется, «берется». Если же интеграл не выражается через элементарные функции, то говорят, что интеграл «нельзя найти» или «не берется». Так, например, существуют первообразные следующих функций:

$$e^{x^2},\ e^{-x^2},\ x\operatorname{tg} x,\ \frac{\sin x}{x},\ \frac{\cos x}{x},\ \sin x^2,$$

$$\sqrt{1+x^3},\ \sqrt[3]{1+x^2},\ \sqrt{\sin x},\ \frac{1}{\ln x},$$

но они не являются элементарными функциями. Поэтому про интегралы

$$\int e^{x^2}dx,\ \int e^{-x^2}dx,\ \int x\operatorname{tg} x\,dx,\ \int\frac{\sin x}{x}dx,$$

$$\int\frac{\cos x}{x}dx,\ \int\sin x^2\,dx,\ \int\sqrt{1+x^3}\,dx,$$

$$\int\sqrt[3]{1+x^2}\,dx,\ \int\sqrt{\sin x}\,dx,\ \int\frac{dx}{\ln x}$$

говорят, что это — «неберущиеся» интегралы.

Упражнение

2.4. Найдите интегралы:

1) $\int x^4\,dx$; 2) $\int 5x^7\,dx$; 3) $\int\frac{dx}{x\sqrt[3]{x}}$;

4) $\int x^3(x^2-1)\,dx$; 5) $\int(ax+b)\,dx$;

6) $\int(7-3t-t^3)\,dt$; 7) $\int(2u^3-5u^2-7u-3)\,du$;

8) $\int\left(\frac{1}{x^3}+\frac{4}{x^5}\right)dx$; 9) $\int\left(\sqrt{t}-\frac{1}{\sqrt{t}}\right)dt$;

10) $\int(ax^7+bx^3+cx^2+dx+e\sqrt{x}+f)\,dx$;

11) $\int\frac{x^8-3x^5-x+1}{x^3}dx$; 12) $\int\frac{(x+1)(x^2-3)}{3x^2}dx$;

13) $\int \frac{t^2+\sqrt{t^3}+3}{\sqrt{t}}\,dt$; 14) $\int 4^x\,dx$;

15) $\int b^x a^x\,dx$ $(b>0,\ b\neq 1)$. 16) $\int (t^7+7^t)\,dt$;

17) $\int 2^x\cdot 3^{2x}\cdot 5^{3x}\,dx$; 18) $\int \frac{3x+1}{x+2}\,dx$;

19) $\int \frac{t^3+2t^2+5t+13}{t^2+5}\,dt$; 20) $\int \frac{dx}{16+9x^2}$;

21) $\int \frac{dx}{\sqrt{25-x^2}}$; 22) $\int \frac{dt}{t^2-3}$; 23) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-13}}$;

24) $\int \frac{dt}{\sqrt{9-4t^2}}$; 25) $\int \frac{dx}{5-2x^2}$;

26) $\int (3e^x+5\sin x+3\cos x+4)\,dx$;

27) $\int \frac{\sin 2x}{\sin x}\,dx$; 28) $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$;

29) $\int \sin 3x\sin 10x\,dx$; 30) $\int \sin 7x\cos 3x\,dx$;

31) $\int \sin x\sin 3x\,dx$; 32) $\int \cos 8x\cos 3x\,dx$;

33) $\int \sin 7x\,dx$; 34) $\int \sin\frac{3}{5}x\,dx$;

35) $\int \cos 10x\,dx$; 36) $\int \cos\frac{x}{9}\,dx$;

37) $\int \left(\sin 11x+\cos 6x+\sin\frac{x}{7}+\cos\frac{3}{4}x\right)dx$;

38) $\int (e^x+e^{-x})\,dx$; 39) $\int e^{3x+5}dx$;

40) $\int (3x-1)^5\,dx$; 41) $\int (1+4x)^{3/5}\,dx$;

42) $\int \frac{(6x+7)\,dx}{3x^2+7x+4}$; 43) $\int \frac{x^5\,dx}{7x^6+1}$;

44) $\int \frac{x^2\,dx}{(3+5x^3)^7}$; 45) $\int x\sqrt{3x^2-1}\,dx$;

46) $\int \cos^5 x\sin x\,dx$; 47) $\int \sqrt[3]{1+\cos x}\ \sin x\,dx$;

48) $\int \cos^2 x\,dx$; 49) $\int \sin^2 x\,dx$;

50) $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$; 51) $\int x^3e^{x^4}\,dx$;

52) $\int e^{\cos x}\sin x\,dx$; 53) $\int \frac{3\,dx}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x}$;

54) $\int \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} 2x}}{1+4x^2}\,dx$; 55) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{2x+3}}$;

56) $\int \frac{dx}{\sqrt{27-x^2+6x}}$; 57) $\int \frac{dx}{x^2+10x+41}$;

58) $\int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$; 59) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+7}}$;

60) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x}}$; 61) $\int \frac{dx}{x^2+6x+25}$;

62) $\int \frac{dx}{x^2+5x+9}$; 63) $\int x \ln x\, dx$;

64) $\int x^2 \sin x\, dx$; 65) $\int (3x-4) \ln x\, dx$;

66) $\int \operatorname{arctg} x\, dx$; 67) $\int (2x-5)\, e^{-3x}\, dx$;

68) $\int \arccos x\, dx$; 69) $\int x \cos \frac{x}{2}\, dx$;

70) $\int (2x-3) \sin \frac{x}{2}\, dx$; 71) $\int x^2 e^{-x}\, dx$;

72) $\int \sqrt{x^2-2}\, dx$; 73) $\int \arcsin x\, dx$;

74) $\int e^x \cos x\, dx$; 75) $\int e^x \sin x\, dx$;

76) $\int \frac{dx}{x^2+8x+25}$; 77) $\int \frac{dx}{17+2x+x^2}$;

78) $\int \frac{dx}{x^2+7x-8}$; 79) $\int \frac{(x+3)\, dx}{x^2-4x+4}$;

80) $\int \frac{(x+2)\, dx}{x^2+x+1}$; 81) $\int \frac{x^2-2x+2}{x^3+2x^2-8x}\, dx$;

82) $\int \frac{x\, dx}{x^3-1}$; 83) $\int \frac{dx}{x^4-1}$; 84) $\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}$.

Глава III

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 7. Площадь криволинейной трапеции

Рассмотрим какую-нибудь неотрицательную непрерывную функцию $f(x)$, $x \in [a; b]$.

Фигура $AabB$ (рис. 11), ограниченная отрезком оси абсцисс, отрезками вертикальных прямых $x=a$ и $x=b$

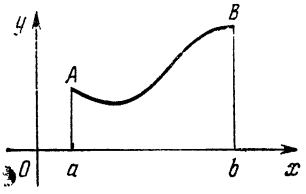


Рис. 11.

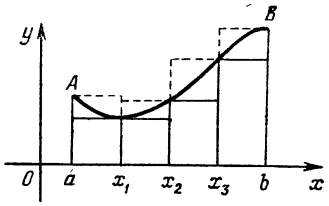


Рис. 12.

и графиком заданной функции, называется *криволинейной трапецией*.

Другими словами, криволинейная трапеция — это множество точек плоскости, координаты которых x, y удовлетворяют условиям: $a \leqslant x \leqslant b$, $0 \leqslant y \leqslant f(x)$.

Найдем площадь этой криволинейной трапеции. Для этого отрезок $[a; b]$ точками

$$x_i = a + \frac{b-a}{n} i, \quad i = 0, 1, \ldots, n,$$

разобьем на n равных по длине отрезков

$$[a; x_1]; [x_1; x_2], \ldots, [x_{n-1}; b].$$

Через m_i и M_i обозначим соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[x_{i-1}; x_i]$, где $i = 1, \ldots, n$.

Криволинейная трапеция $AabB$ разобьется на n частей (рис. 12). Очевидно, площадь i-й части не меньше

$m_i(x_i - x_{i-1})$ и не больше $M_i(x_i - x_{i-1})$. Следовательно, площадь всей криволинейной трапеции $AabB$ не меньше суммы

$$m_1\Delta x_1 + \ldots + m_n\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i,$$

где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, и не больше суммы

$$M_1\Delta x_1 + \ldots + M_n\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i.$$

Обозначив эти суммы соответственно s_n и S_n, получим, что S_{AabB} удовлетворяет неравенствам

$$s_n \leqslant S_{AabB} \leqslant S_n.$$

Здесь слева стоит площадь ступенчатой фигуры, которая содержится в данной криволинейной трапеции, а справа — площадь ступенчатой фигуры, которая содержит данную криволинейную трапецию. При достаточно мелком разбиении отрезка $[a; b]$, т. е. при достаточно большом n, площади этих фигур мало отличаются друг от друга и от площади криволинейной трапеции. Следовательно, можно считать, что последовательности (s_n) и (S_n) имеют один и тот же предел и этот предел равен площади фигуры $AabB$.

Это утверждение получено в предположении существования площади у рассматриваемой криволинейной трапеции, однако нигде еще не дано определение этого понятия. Проведенные рассуждения делают естественным следующее определение.

Определение. Пусть задана непрерывная неотрицательная функция $f(x)$, $x \in [a; b]$. Тогда, если пределы последовательностей (s_n) и (S_n) существуют и равны, то их общее значение называется *площадью криволинейной трапеции*

$$\{(x; y) | a \leqslant x \leqslant b,\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}.$$

В § 8 будет сформулировано утверждение, из которого следует, что любая криволинейная трапеция имеет площадь.

Пример 1. Показать, что площадь прямоугольного треугольника (рис. 13) с вершинами в точках $(0; 0)$, $(a; 0)$ и $(a; b)$ согласно данному определению равна $\frac{1}{2}ab$, т. е. вычисляется по известной формуле.

Решение. Данный треугольник является криволинейной трапецией для функции

$$f(x)=\frac{b}{a}x, \qquad x\in[0;\ a].$$

Отрезок $[0;\ a]$ точками $x_i=\frac{a}{n}i$, $i=0,\ 1,\ \ldots,\ n$, разделим на n отрезков длины $\frac{a}{n}$. Тогда (см. рис. 13)

$$m_i=f(x_{i-1})=\frac{b}{n}(i-1),$$

$$M_i=f(x_i)=\frac{b}{n}i,$$

и поэтому

$$s_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{b}{n}(i-1)\frac{a}{n}=\frac{ab}{n^2}\cdot\frac{(n-1)n}{2}=\frac{ab}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right),$$

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{b}{n}i\frac{a}{n}=\frac{ab}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}=\frac{ab}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Отсюда видно, что

$$\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{ab}{2}.$$

Таким образом, доказано, что площадь данного треугольника равна $\frac{1}{2}ab$.

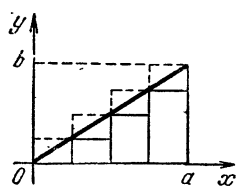


Рис. 13.

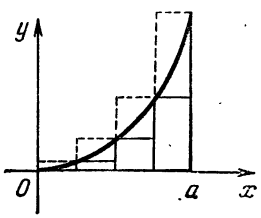


Рис. 14.

Пример 2. Найти площадь фигуры, ограниченной частью параболы $y=x^2$ и отрезками прямых $y=0$ и $x=a$, где $a>0$ (рис. 14).

Решение. Как и в примере 1, отрезок $[0; a]$ точками $x_i = \frac{a}{n} i$, $i = 0, 1, \ldots, n$, разделим на n отрезков длины $\frac{a}{n}$. Тогда

$$s_n = \frac{a}{n} \sum_{i=1}^{n} x_{i-1}^2 = \frac{a^3}{n^3} \sum_{i=1}^{n} (i-1)^2,$$

$$S_n = \frac{a}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \frac{a^3}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2.$$

В п. 7 § 6 ч. I было доказано, что

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Следовательно,

$$S_n = \frac{a^3}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{a^3}{3} \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{2n}\right),$$

$$s_n = \frac{a^3}{n^3} \cdot \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \frac{a^3}{3} \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{2n}\right),$$

и поэтому

$$\lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a^3}{3}.$$

Таким образом, площадь заданной фигуры равна $\frac{1}{3} a^3$.

Замечание 1. Рассмотрим снова криволинейную трапецию $AabB$ и, как и обычно, отрезок $[a; b]$ точками x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, разобьем на n отрезков равной длины. На каждом отрезке $[x_{i-1}; x_i]$ произвольным образом выберем некоторую точку и обозначим ее ξ_i.

Если, как и выше, m_i и M_i — наименьшее и наибольшее значения функции f на отрезке $[x_{i-1}; x_i]$, то, очевидно,

$$m_i \leqslant f(\xi_i) \leqslant M_i,$$

где $i = 1, \ldots, n$. Умножим каждое из этих неравенств на $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ и полученные неравенства почленно сложим. Тогда получим следующее неравенство:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i.$$

Отсюда следует, что предел

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i$$

существует, не зависит от выбора точек ξ_i и всегда равен площади фигуры $AabB$.

Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i = S_{AabB}. \qquad (1)$$

Замечание 2. Выше отрезок $[a;\ b]$ разбивался на n равных по длине отрезков. Можно доказать, что формула (1) остается справедливой и в том случае, если отрезок $[a;\ b]$ разбивать на n отрезков произвольной длины, но таких, что наибольшая из длин этих отрезков стремится к нулю при $n\to\infty$.

Упражнения

3.1. Вычислите площадь фигуры, ограниченной частью прямой $y=x$ и отрезками прямых $y=0$ и $x=3$.

3.2. Вычислите площадь фигуры, ограниченной частью прямой $y=2x$ и отрезками прямых $x=a$ и $x=b$, где $a>0$, $b>a$.

3.3. Вычислите площадь криволинейной трапеции, определяемой графиком функции $y=e^x$ на отрезке $0\leqslant x\leqslant 1$

3.4. Докажите что площадь криволинейной трапеции, определяемой частью параболы $y=1-x^2$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$, равна 2/3.

§ 8. Определенный интеграл

1. Определение интеграла. Рассмотрим функцию $f(x)$, определенную на отрезке $[a;\ b]$. Как и в § 7, отрезок $[a;\ b]$ точками

$$x_i = a+\frac{b-a}{n}\,i, \qquad i=0,\ 1,\ \ldots,\ n,$$

разобьем на n равных по длине отрезков.

В каждом из этих отрезков $[x_{i-1};\ x_i]$, $i=1,\ \ldots,\ n$, произвольным образом выберем по одной точке и обозначим ее ξ_i: $\xi_i\in[x_{i-1};\ x_i]$.

Тогда сумма

$$f(\xi_1)\,\Delta x_1+\ldots+f(\xi_n)\,\Delta x_n=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i,$$

где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, называется *интегральной суммой* функции f.

Очевидно, эта сумма зависит и от того, как разбит отрезок $[a; b]$, и от того, как выбраны точки ξ_i.

Определение. Если предел

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i$$

существует и не зависит от выбора точек ξ_i, то функция f называется *интегрируемой* на отрезке $[a; b]$, а предел называется *определенным интегралом* от функции f на отрезке $[a; b]$ и обозначается

$$\int_a^b f(x)\, dx.$$

Это обозначение читается: «интеграл от a до b от функции $f(x)$ по dx» или, короче, «интеграл от a до b от $f(x)\, dx$». Знак $\int$ называется *знаком интеграла*, функция f — *подынтегральной функцией*, переменная x — *переменной интегрирования*, выражение $f(x)\, dx$ — *подынтегральным выражением*. Числа a и b называются *пределами интегрирования*, соответственно, нижним и верхним.

Таким образом, согласно определению

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i.$$

Заметим, что интеграл не зависит от того, какой буквой обозначена переменная интегрирования, так что, например,

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b f(t)\, dt = \int_a^b f(u)\, du.$$

Примеры непосредственного вычисления определенных интегралов (исходя непосредственно из определения) были даны в § 7 (см. примеры 1 и 2).

2. Теоремы об интегрируемости функций на отрезке. Приведем без доказательства следующие теоремы.

Теорема 1. *Если функция $f(x)$ монотонна на отрезке $[a; b]$, то она интегрируема на этом отрезке.*

Теорема 2. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то она интегрируема на этом отрезке.*

Конечно, если $f(x)$ и монотонна и непрерывна на $[a; b]$, то она интегрируема на $[a; b]$.

Заметим, что ограниченные функции, встречающиеся на практике, как правило, интегрируемы на любом отрезке, на котором они заданы.

3. Пример неинтегрируемой функции. На отрезке $[0; 1]$ рассмотрим функцию Дирихле. Она равна 1 в рациональных точках и нулю в иррациональных точках. Поэтому, если в интегральных суммах в качестве точек ξ_i выбирать иррациональные точки, то

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot \Delta x_i = 0,$$

и, следовательно, предел этих сумм при $n \to 0$ равен 0. А если в качестве ξ_i выбирать рациональные точки, то

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = 1,$$

и, следовательно, предел этих сумм равен 1.

Таким образом, для функции Дирихле на отрезке $[0; 1]$ предел интегральных сумм зависит от выбора точек ξ_i. Это и означает, что функция Дирихле не является интегрируемой на $[0; 1]$.

§ 9. Свойства определенных интегралов

1. Основные свойства определенных интегралов.

1. *Для любого действительного числа* α

$$\int_a^b \alpha\,dx = \alpha(b-a). \tag{1}$$

В самом деле, для любой интегральной суммы функции $f(x) = \alpha$, $x \in [a; b]$, имеем

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha\,\Delta x_i = \alpha \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \alpha(b-a),$$

и поэтому предел таких сумм при $n \to \infty$ равен $\alpha(b-a)$.

2. *Если функция* $f(x)$ *интегрируема на отрезке* $[a; b]$, *то для любого действительного числа* α *функция* $\alpha f(x)$ *также интегрируема на* $[a; b]$ *и*

$$\int_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx, \tag{2}$$

т. е. постоянный множитель можно выносить за знак интеграла.

Действительно, для любой интегральной суммы функции $\alpha f(x)$ имеем

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha f(\xi_i)\,\Delta x_i = \alpha \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i,$$

и поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \alpha f(\xi_i)\,\Delta x_i = \alpha \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i = \alpha \int_a^b f(x)\,dx,$$

а это и означает, что функция $\alpha f(x)$ интегрируема на $[a; b]$ и справедлива формула (2).

3. *Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a; b]$, то их сумма $f(x)+g(x)$ также интегрируема на $[a; b]$ и*

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx, \tag{3}$$

т. е. интеграл от суммы равен сумме интегралов.

Действительно,

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (f(\xi_i)+g(\xi_i))\,\Delta x_i =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\,\Delta x_i =$$

$$= \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

4. *Если на отрезке $[a; b]$ функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы и*

$$f(x) \leqslant g(x), \tag{4}$$

то справедливо неравенство

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx. \tag{5}$$

В самом деле, из неравенства (4) следует, что для любых интегральных сумм для функций $f(x)$ и $g(x)$

выполняется неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\,\Delta x_i,$$

из которого в пределе при $n \to \infty$ и получается неравенство (5).

5. *Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a; b]$, то она интегрируема на любом отрезке, содержащемся в $[a; b]$. Кроме того, если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a; c]$ и интегрируема на отрезке $[c; b]$, то она интегрируема на отрезке $[a; b]$ и*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \tag{6}$$

Это свойство мы доказывать не будем.

2. Следствия из основных свойств.

Следствие 1. *Если на отрезке $[a; b]$ функции $f(x)$, $g(x)$ и $\varphi(x)$ интегрируемы и*

$$m\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant Mg(x),$$

то

$$m\int_a^b \varphi(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M\int_a^b g(x)\,dx. \tag{1}$$

В частности, если $m \leqslant f(x) \leqslant M$, то

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a). \tag{2}$$

Неравенство (1) является непосредственным следствием свойства 4, а неравенство (2) следует из (1) для $\varphi(x) = g(x) = 1$ и свойства 1.

Следствие 2. *Если на отрезке $[a; b]$ функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы и*

$$|f(x)| \leqslant Mg(x), \tag{3}$$

то

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant M\int_a^b g(x)\,dx. \tag{4}$$

В частности, если $|f(x)| \leqslant M$, то

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant M(b-a). \tag{5}$$

Действительно, из (3) следует, что

$$-Mg(x) \leqslant f(x) \leqslant Mg(x),$$

и поэтому

$$-M\int_a^b g(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M\int_a^b g(x)\,dx,$$

а это и означает, что выполняется неравенство (4), так как $M\int_a^b g(x)\,dx \geqslant 0$. Неравенство (5) является частным случаем неравенства (4) при $g(x)=1$.

3. Некоторые обобщения. Выше был рассмотрен определенный интеграл в случае, когда нижний предел интегрирования меньше верхнего. На практике такое ограничение вызывает некоторые неудобства. Чтобы освободиться от этого ограничения, введем следующее определение.

Определение. Если $a=b$, то $\int_a^b f(x)\,dx=0$.

Если $a<b$, то

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Последняя формула означает, что если в интеграле поменять местами пределы интегрирования, то интеграл изменит знак.

Для таких интегралов справедливы все свойства определенных интегралов, кроме свойства 4 и следствий из него.

Свойства 1, 2 и 3 предлагается читателю доказать самостоятельно.

Свойство 4 для интегралов, у которых нижний предел интегрирования больше верхнего, формулируется следующим образом:

Если на $[a; b]$ *функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *интегрируемы и* $f(x) \leqslant g(x)$, *то справедливо неравенство*

$$\int_b^a f(x)\,dx \geqslant \int_b^a g(x)\,dx.$$

Это неравенство получается из неравенства (5) п. 1 умножением на -1.

Соответствующим образом изменятся и неравенства (1) и (2) п. 2.

Как и раньше, если $|f(x)| \leqslant M$ на $[a; b]$, то

$$\left|\int_b^a f(x)\,dx\right| \leqslant M(b-a).$$

Свойство 5 при таком обобщении интеграла также остается справедливым.

Более того, для любых трех точек c_1, c_2 и c_3 из области определения функции $f(x)$ справедлива формула

$$\int_{c_1}^{c_3} f(x)\,dx = \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx + \int_{c_2}^{c_3} f(x)\,dx. \qquad (1)$$

Если $c_1 < c_2 < c_3$, то это — формула (6) из п. 1. Если, например, $c_2 < c_1 < c_3$, то

$$\int_{c_2}^{c_3} f(x)\,dx = \int_{c_2}^{c_1} f(x)\,dx + \int_{c_1}^{c_3} f(x)\,dx$$

или

$$\int_{c_1}^{c_3} f(x)\,dx = -\int_{c_2}^{c_1} f(x)\,dx + \int_{c_2}^{c_3} f(x)\,dx.$$

Поменяв местами пределы интегрирования c_1 и c_2, получим формулу (1).

В остальных случаях формула (1) доказывается аналогично.

4. Теорема о среднем. Для непрерывной функции справедлива следующая интересная теорема, которая называется *теоремой о среднем для определенного интеграла.*

Теорема *Если функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a; b]$, *то существует на* $[a; b]$ *такая точка* ξ, *что*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a). \qquad (1)$$

Доказательство. Заметим, что если $a=b$, то равенство (1) очевидно. В этом случае в нем и слева и справа стоит нуль, так что содержательным является лишь случай $a<b$.

Пусть теперь $a<b$. Через m и M обозначим соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$. Тогда $m \leqslant f(x) \leqslant M$ для любого x из $[a; b]$, и поэтому

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a).$$

Разделив почленно это неравенство на $b-a>0$, получим неравенство

$$m \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leqslant M.$$

Отсюда и следует формула (1). Действительно, так как $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, то она принимает любое значение из отрезка $[m; M]$, и поэтому существует такая точка $\xi \in [a; b]$, что

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Теорема доказана.

Для неотрицательной функции теорема о среднем имеет простое геометрическое истолкование. В нем утверждается, что площадь криволинейной трапеции, соответствующей функции f, равна площади прямоугольника, у которого основание равно основанию трапеции, а высота равна одному из значений интегрируемой функции (рис. 15).

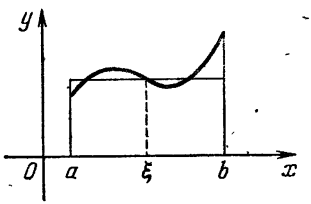


Рис. 15

Замечание. Формула (1) справедлива не только для интегралов, у которых нижний предел интегрирования меньше верхнего, но и для интегралов, у которых нижний предел больше верхнего.

Действительно, пусть функция $f(x)$ удовлетворяет всем условиям только что доказанной теоремы. Тогда

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx = -f(\xi)(b-a) = f(\xi)(a-b),$$

где $\xi \in [a; b]$.

5. Определенный интеграл с переменным верхним пределом. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$. Тогда она интегрируема на любом отрезке $[a; x]$, где $x \in [a; b]$. Рассмотрим функцию

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \quad x \in [a; b]. \tag{1}$$

Эта функция называется *интегралом с переменным верхним пределом.*

Заметим, что в (1) переменная интегрирования обозначена буквой t, так как буквой x здесь обозначен верхний предел интеграла (здесь он является независимой переменной функции Φ).

Теорема. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, $a < b$, то функция (1) имеет производную на $[a; b]$ и $\Phi'(x) = f(x)$, т. е.*

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x). \tag{2}$$

Очевидно, в точках a и b имеет смысл говорить лишь об односторонних производных функции $\Phi(x)$.

Эта теорема называется *теоремой о дифференцировании интеграла по верхнему пределу.*

Доказательство. Из определения функции $\Phi(x)$ и свойств интеграла (см. свойство 5) следует, что

$$\Phi(x) - \Phi(x_0) = \int_a^x f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt = \int_{x_0}^x f(t)\,dt$$

для любых x и x_0 из $[a; b]$. К последнему интегралу применим теорему о среднем (см. также замечание в конце п 4). Тогда

$$\Phi(x) - \Phi(x_0) = f(\xi)(x - x_0),$$

где $\xi \in [x_0; x]$, если $x_0 < x$, и $\xi \in [x; x_0]$, если $x < x_0$.

Таким образом, для любого $x \neq x_0$ найдется такое ξ, лежащее между x и x_0, что

$$\frac{\Phi(x)-\Phi(x_0)}{x-x_0}=f(\xi).$$

Так как функция $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, а следовательно, и в точке $x_0 \in [a; b]$, то

$$\Phi'(x_0)=\lim_{x \to x_0}\frac{\Phi(x)-\Phi(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x \to x_0} f(\xi)=f(x_0).$$

Очевидно, в точке $x_0=a$ у $\Phi(x)$ будет правая производная, а в точке $x_0=b$ — левая производная. Теорема доказана.

Эту теорему коротко можно сформулировать следующим образом: *для непрерывной функции производная интеграла по верхнему пределу равна самой функции.*

В дифференциалах формула (2) имеет вид

$$d\int_a^x f(t)\,dt=f(x)\,dx, \tag{3}$$

т. е. дифференциал от интеграла по верхнему пределу равен подынтегральному выражению.

Из доказанной теоремы следует, что у любой непрерывной функции имеется первообразная, которая является определенным интегралом с переменным верхним пределом от данной функции.

§ 10. Методы вычисления определенных интегралов

1. Формула Ньютона — Лейбница. Напомним, функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$, если $F(x)$ имеет производную на отрезке $[a; b]$ и $F'(x)=f(x)$.

Теорема. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, а функция $F(x)$ является первообразной для $f(x)$ на $[a; b]$, то справедлива формула*

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a). \tag{1}$$

Эта формула называется *формулой Ньютона — Лейбница*

Доказательство. Из теоремы о дифференцировании интеграла по верхнему пределу следует, что функция

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

является первообразной для функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$. Так как и функция $F(x)$ является первообразной для $f(x)$ на $[a; b]$, то разность $\Phi(x)-F(x)$ равна некоторой постоянной C на всем отрезке $[a; b]$, т. е

$$\Phi(x)=F(x)+C.$$

Положив здесь сначала $x=a$, а затем $x=b$, получим

$$\Phi(a)=F(a)+C,$$
$$\Phi(b)=F(b)+C.$$

Так как $\Phi(a)=0$, то $C=-F(a)$, и поэтому

$$\Phi(b)=F(b)-F(a),$$

где

$$\Phi(b)=\int_a^b f(x)\,dx.$$

Теорема доказана.

Часто вместо разности $F(b)-F(a)$ пишут $F(x)\Big|_a^b$, и тогда формула (1) принимает вид

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(x)\Big|_a^b. \qquad (2)$$

Эта формула читается так: «интеграл от a до b от $f(x)$ по dx равен подстановке от a до b от $F(x)$».

Так как $f(x)\,dx=dF(x)$, то вместо $\int_a^b f(x)\,dx$ пишут $\int_a^b dF(x)$ и говорят: «интеграл от a до b от дифференциала $dF(x)$» или, короче, «интеграл от a до b от $dF(x)$».

Таким образом,

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b dF(x)=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a),$$

т. е. интеграл от a до b от дифференциала некоторой функции равен разности ее значений в точках b и a.

Как уже отмечалось, формула (1) называется формулой Ньютона — Лейбница. Она названа в честь двух великих создателей дифференциального и интегрального исчислений И. Ньютона и Г. Лейбница. Два исчисления, дифференциальное и интегральное, развиваемые независимо, с получением этой формулы оказываются тесно связанными и объединяются в единую теорию — математический анализ, так что формула Ньютона — Лейбница по праву может быть названа центральной теоремой математического анализа.

Формула Ньютона — Лейбница позволяет вычислять определенные интегралы без интегральных сумм и предельного перехода в тех случаях, когда известна хотя бы одна первообразная подынтегральной функции. Методы отыскания первообразных были развиты ранее, в гл. II.

Рассмотрим несколько примеров на вычисление определенных интегралов с помощью формулы Ньютона — Лейбница.

Пример 1. Вычислим $\int\limits_0^1 x^2\,dx$.

Так как функция $\frac{1}{3}x^3$ является первообразной для функции x^2, то по формуле Ньютона — Лейбница

$$\int\limits_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Пример 2. Вычислим $\int\limits_{-1}^1 (x+\sin x+x^{10})\,dx$.

Так как интеграл от суммы равен сумме интегралов, а функции $\frac{1}{2}x^2$, $-\cos x$, $\frac{1}{11}x^{11}$ являются первообразными соответственно для x, $\sin x$ и x^{10}, то

$$\int\limits_{-1}^1 (x+\sin x+x^{10})\,dx = \int\limits_{-1}^1 x\,dx + \int\limits_{-1}^1 \sin x\,dx + \int\limits_{-1}^1 x^{10}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}x^2\Big|_{-1}^1 + (-\cos x)\Big|_{-1}^1 + \frac{1}{11}x^{11}\Big|_{-1}^1 =$$

$$= \frac{1}{2}(1-1) + (-\cos 1 + \cos(-1)) + \frac{1}{11}(1+1) = \frac{2}{11}.$$

Следовательно, $\int\limits_{-1}^{1}(x+\sin x+x^{10})\,dx=\frac{2}{11}$.

Пример 3. Вычислим $\int\limits_{0}^{2}f(x)\,dx$, где $f(x)=e^x$, если $x\in[0;\,1]$, и $f(x)=2x$, если $x\in\,]1;\,2]$.

Так как интеграл от 0 до 2 равен сумме интегралов от 0 до 1 и от 1 до 2, то

$$\int\limits_{0}^{2}f(x)\,dx=\int\limits_{0}^{1}e^x\,dx+\int\limits_{1}^{2}2x\,dx=e^x\Big|_0^1+x^2\Big|_1^2=$$

$$=e-1+4-1=e+2.$$

Следовательно, $\int\limits_{0}^{2}f(x)\,dx=e+2$.

2. Вычисление определенных интегралов методом подстановки. При вычислении определенных интегралов, как и неопределенных, широко используется метод подстановки или метод замены переменной интегрирования. Сформулируем и докажем соответствующую теорему.

Теорема. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна в любой точке $x=\varphi(t)$, где $t\in[\alpha;\,\beta]$, и пусть $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$. Тогда, если функция $\varphi(t)$ имеет непрерывную производную, то справедлива следующая формула*:

$$\int\limits_{a}^{b}f(x)\,dx=\int\limits_{\alpha}^{\beta}f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt. \tag{3}$$

Эта формула называется *формулой замены переменной интегрирования в определенном интеграле.*

Доказательство. Так как функция $f(x)$ непрерывна, то она обязательно имеет первообразную. Обозначим ее $F(x)$. Тогда сложная функция $F(\varphi(t))$ будет первообразной для функции $f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$.

Вычислим теперь интегралы от функций $f(x)$ и $f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$ по формуле Ньютона—Лейбница:

$$\int\limits_{a}^{b}f(x)\,dx=F(b)-F(a), \tag{2}$$

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta}f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt=F(\varphi(\beta))-F(\varphi(\alpha)). \tag{3}$$

По условию $b=\varphi(\beta)$, а $a=\varphi(\alpha)$, и поэтому правые части в (2) и (3) равны. Следовательно, равны и левые части, т. е. справедлива формула (1). Теорема доказана

Формулу (1) можно записать в следующем виде:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,d\varphi(t). \tag{4}$$

Таким образом, при замене переменной интегрирования $x=\varphi(t)$ следует, во-первых, под знаком интеграла всюду заменить x на $\varphi(t)$ и, во-вторых, соответствующим образом изменить пределы интегрирования

При вычислении определенных интегралов формулы (1) и (4) применяют не только слева направо, но и справа налево.

Довольно часто вычисление интеграла от $f(\varphi)\varphi'$ сводят к вычислению интеграла от f В этом случае формулы (1) и (4) удобно переписать в следующем виде:

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx=\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(y)\,dy, \tag{5}$$

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\,d\varphi(x)=\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(y)\,dy \tag{6}$$

(Здесь изменены обозначения переменных интегрирования: t на x, а x на y.)

Таким образом, если подынтегральное выражение имеет вид $f(\varphi(x))\,d\varphi(x)$ или приводится к этому виду, то можно делать замену $y=\varphi(x)$. Для этого нужно под знаком интеграла всюду вместо $\varphi(x)$ подставить y, а пределы интегрирования α, β заменить соответственно на $\varphi(\alpha)$, $\varphi(\beta)$.

Пример 1 Вычислим $\int_1^2 x\cos x^2\,dx$.

Применим формулу (1), положив $x=\sqrt{t}$. Для этого надо всюду x заменить на $\sqrt{t}$ и соответствующим образом изменить пределы интегрирования. Здесь $t=x^2$, и поэтому в новом интеграле пределами интегрирования

будут 1 и 4. Таким образом,

$$\int_1^2 x\cos x^2\,dx=\int_1^4 \sqrt{t}\cos t\,d\sqrt{t}=\int_1^4 \sqrt{t}\cos t\,\frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^4 \cos t\,dt=\frac{1}{2}\sin t\Big|_1^4=\frac{1}{2}(\sin 4-\sin 1).$$

Покажем, как этот интеграл можно вычислить с помощью формулы (6):

$$\int_1^2 x\cos x^2\,dx=\frac{1}{2}\int_1^2 \cos x^2\,2x\,dx=\frac{1}{2}\int_1^2 \cos x^2\,d(x^2)=$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^4 \cos y\,dy=\frac{1}{2}\sin y\Big|_1^4=\frac{1}{2}(\sin 4-\sin 1).$$

Здесь сделана подстановка $y=x^2$.

Пример 2. Вычислим $\int_{-1}^{2} x\sin x^2\,dx$.

Так как

$$\int_{-1}^{2} x\sin x^2\,dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{2}\sin x^2\,d(x^2),$$

то положим $y=x^2$. Тогда

$$\int_{-1}^{2} x\sin x^2\,dx=\frac{1}{2}\int_1^4 \sin y\,dy=\frac{1}{2}(-\cos y)\Big|_1^4=$$

$$=\frac{1}{2}(\cos 1-\cos 4).$$

Заметим, что здесь делать замену $x=\sqrt{t}$ нельзя, так как $\sqrt{t}\geqslant 0$, а в данном интеграле x принимает и отрицательные значения.

Пример 3. Вычислим интеграл от 0 до $\frac{\pi}{2}$ от функции $e^{\sin x}\cos x$.

Имеем

$$\int_0^{\pi/2} e^{\sin x}\cos x\,dx=\int_0^{\pi/2} e^{\sin x}\,d(\sin x)=\int_0^1 e^y\,dy=e^y\Big|_0^1=e-1$$

Здесь сделана подстановка $y=\sin x$.

Заметим, что этот интеграл, как и интегралы из примеров 1 и 2, можно вычислить без замены переменной интегрирования. Действительно,

$$\int_0^{\pi/2} e^{\sin x}\cos x\,dx = \int_0^{\pi/2} e^{\sin x}\,d(\sin x) = \int_0^{\pi/2} d(e^{\sin x}) =$$

$$= e^{\sin x}\Big|_0^{\pi/2} = e - 1.$$

Пример 4. Вычислим $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\cos x}$.

Для нахождения неопределенного интеграла от функции $f(x) = \frac{1}{1+\cos x}$ воспользуемся подстановкой $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$. Точнее, сделаем следующую замену переменной интегрирования:

$$x = 2\operatorname{arctg} t.$$

Из формул тригонометрии следует, что

$$\cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

и поэтому

$$\frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \frac{1+t^2}{1+t^2+1-t^2} = \frac{1+t^2}{2}.$$

Подсчитаем теперь dx:

$$dx = 2(\operatorname{arctg} t)'\,dt = \frac{2}{1+t^2}dt.$$

Наконец, так как $\operatorname{tg}\frac{0}{2} = 0$, $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2\cdot 2} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$, то в новом интеграле пределами интегрирования нужно брать 0 и 1.

Таким образом,

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\cos x} = \int_0^1 \frac{1+t^2}{2}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt = \int_0^1 dt = 1.$$

Пример 5. Вычислим $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2+\cos x}$.

Положим $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$. Тогда

$$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad dx=\frac{2}{1+t^2}dt,$$

и интеграл по dt нужно брать от 0 до 1.

Следовательно,

$$\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{2+\cos x}=\int_0^1\frac{1+t^2}{2+2t^2+1-t^2}\,\frac{2}{1+t^2}\,dt=\int_0^1\frac{2}{3+t^2}\,dt.$$

Теперь сделаем новую замену $t=\sqrt{3}y$:

$$\int_0^1\frac{2}{3+t^2}\,dt=\int_0^{1/\sqrt{3}}\frac{2}{3+3y^2}\sqrt{3}\,dy=\frac{2}{\sqrt{3}}\int_0^{1/\sqrt{3}}\frac{dy}{1+y^2}.$$

Таким образом,

$$\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{2+\cos x}=\frac{2}{\sqrt{3}}\int_0^{1/\sqrt{3}}\frac{dy}{1+y^2}=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg} y\Big|_0^{1/\sqrt{3}}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

3. Вычисление определенных интегралов методом интегрирования по частям. Как известно, формула интегрирования по частям для неопределенных интегралов доказывается интегрированием равенства

$$(uv)'=uv'+vu'. \tag{1}$$

Аналогично доказывается и формула интегрирования по частям для определенных интегралов.

Теорема. *Если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a;\ b]$, то справедлива формула*

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx=u(x)\,v(x)\Big|_a^b-\int_a^b v(x)\,u'(x)\,dx. \tag{2}$$

Коротко эта формула записывается так:

$$\int_a^b u\,dv=uv\Big|_a^b-\int_a^b v\,du. \tag{3}$$

Формула (2), как и формула (3), называется *формулой интегрирования по частям* для определенного интеграла.

Доказательство. Из равенства (1) следует, что

$$\int_a^b (uv)'\,dx = \int_a^b uv'\,dx + \int_a^b vu'\,dx,$$

а так как интеграл от $(uv)'$ равен подстановке $uv\Big|_a^b$, то

$$uv\Big|_a^b = \int_a^b uv'\,dx + \int_a^b vu'\,dx.$$

Отсюда и следует формула (2). Теорема доказана.

Формула интегрирования по частям сводит вычисление одного интеграла к вычислению другого интеграла. Естественно, стремятся к тому, чтобы полученный интеграл был проще исходного или более удобным для изучения.

Пример 1. Вычислим $\int_1^3 \ln x\,dx$.

Применим формулу интегрирования по частям, положив $u=\ln x$, $dv=dx$. Тогда

$$\int_1^3 \ln x\,dx = x\ln x\Big|_1^3 - \int_1^3 x\,d(\ln x) =$$

$$= 3\ln 3 - \int_1^3 x\frac{1}{x}\,dx = 3\ln 3 - \int_1^3 dx = 3\ln 3 - 2.$$

Пример 2. Вычислим $\int_0^\pi x^2\cos x\,dx$.

Положим $u=x^2$, $\cos x\,dx=dv$, т. е. $v=\sin x$, и применим формулу (2):

$$\int_0^\pi x^2\cos x\,dx = x^2\sin x\Big|_0^\pi - \int_0^\pi 2x\sin x\,dx = -2\int_0^\pi x\sin x\,dx.$$

К полученному интегралу снова применим формулу интегрирования по частям:

$$\int_0^\pi x\sin x\,dx = \int_0^\pi x\,d(-\cos x) =$$

$$= -x\cos x\Big|_0^\pi + \int_0^\pi \cos x\,dx = \pi + \sin x\Big|_0^\pi = \pi.$$

Таким образом,

$$\int_0^{\pi} x^2 \cos x\, dx = -2\pi.$$

Пример 3. Вычислим интеграл от 0 до 3 от функции $f(x)$, которая равна x^2 на $[0; 1[$, x на $[1; 2]$ и $e^x + \frac{1}{6}$ на $[2; 3]$.

Имеем

$$\int_0^3 f(x)\, dx = \int_0^1 x^2\, dx + \int_1^2 x\, dx + \int_2^3 \left(e^x + \frac{1}{6}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^1 + \frac{1}{2} x^2 \Big|_1^2 + e^x \Big|_2^3 + \frac{1}{6} =$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{2}(4-1) + e^3 - e^2 + \frac{1}{6} = \frac{1}{3} + \frac{3}{2} + e^3 - e^2 + \frac{1}{6} =$$

$$= \frac{11}{6} + e^3 - e^2 + \frac{1}{6} = 2 + e^3 - e^2.$$

Упражнения

3.5. Вычислите интегралы:

а) $\int_1^3 x^3\, dx$; б) $\int_1^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^4}\right) dx$;

в) $\int_1^4 \sqrt{x}\, dx$; г) $\int_0^{\pi/4} \sin 4x\, dx$; д) $\int_0^{\pi} \sin 2x\, dx$.

3.6. Вычислите интегралы:

а) $\int_1^2 (2x+1)\, dx$; б) $\int_0^{\pi/2} \sin 2x\, dx$; в) $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin^3 x}\, dx$.

3.7. Дана функция $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ \sqrt{x} & \text{при } 1 \leqslant x \leqslant 2. \end{cases}$

Вычислите $\int_0^2 f(x)\, dx$.

3.8. Вычислите интегралы:

а) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-3x}}$; б) $\int_0^1 e^{2x}\, dx$; в) $\int_0^2 x(3-x)\, dx$;

г) $\int_1^2 \frac{e^x}{e^x-1}\,dx$; д) $\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{5-x}}$; е) $\int_{-1}^{+1} \frac{1}{1+x^2}\,dx$.

3.9. Вычислите интегралы:

а) $\int_1^9 \frac{y-1}{\sqrt{y}+1}\,dy$; б) $\int_0^{16} \frac{dx}{\sqrt{x+9}-\sqrt{x}}$;

в) $\int_0^1 (e^x-1)^4 e^x\,dx$; г) $\int_0^1 \frac{x\,dx}{(x^2+1)^2}$.

3.10. Вычислите интегралы:

а) $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2}\,dx$; б) $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx$;

в) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$; г) $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$; д) $\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

3.11. Почему в интеграле $\int_2^3 x\sqrt[3]{1-x^2}\,dx$ нельзя применить подстановку $x=\sin t$?

3.12. Вычислите интегралы:

а) $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\cos x\,dx$; б) $\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx$.

3.13. Вычислите интегралы:

а) $\int_0^1 xe^x\,dx$; б) $\int_0^{\pi/2} x\sin x\,dx$; в) $\int_0^{\pi/2} x^2\sin x\,dx$;

г) $\int_0^{\pi^2/4} \sin\sqrt{x}\,dx$; д) $\int_0^1 x\ln(x^2+1)\,dx$;

е) $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$; ж) $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{x\,dx}{\sin^2 x}$.

§ 11. Приближенные методы вычисления определенных интегралов

На практике часто требуется вычислять определенные интегралы от функций, для которых не удается найти первообразных. В таких случаях, как правило, ограни-

чиваются нахождением лишь приближенного значения рассматриваемого интеграла. Даже в тех случаях, когда известна первообразная, на практике бывает иногда более удобно находить приближенное значение интеграла не по формуле Ньютона — Лейбница, а по формулам приближенного интегрирования.

В этом параграфе приведем две простейшие формулы приближенного вычисления определенных интегралов — формулу прямоугольников и формулу трапеций.

1. Формула прямоугольников. Пусть требуется вычислить интеграл от a до b от функции $f(x)$. Как и обычно, отрезок $[a; b]$ точками

$$x_i = a + \frac{b-a}{n} i, \quad i = 0, 1, \ldots, n, \tag{1}$$

разобьем на n равных по длине отрезков. В каждом полученном отрезке $[x_{i-1}; x_i]$ через ξ_i обозначим середину этого отрезка: $\xi_i = \frac{x_{i-1}+x_i}{2}$, $i = 1, \ldots, n$, и составим интегральную сумму

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i). \tag{2}$$

Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a; b]$, то

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{3}$$

Поэтому при достаточно большом n интегральную сумму (2) можно принять за приближение искомого интеграла:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right). \tag{4}$$

Заметим, что равенство (3) справедливо для любой интегральной суммы. Однако можно доказать, что в общем случае наилучшие приближения дают интегральные суммы, в которых в качестве точек ξ_i взяты середины отрезков $[x_{i-1}; x_i]$, $i = 1, \ldots, n$.

Таким образом, отрезок $[a; b]$ точками x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, разбивается на n равных по длине отрезков

$[x_{i-1}; x_i]$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx,$$

и каждый интеграл на отрезке $[x_{i-1}; x_i]$ заменяется произведением $f(\xi_i)\,\Delta x_i$, т. е.

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \approx f(\xi_i)\,\Delta x_i,$$

где ξ_i — середина отрезка $[x_{i-1}; x_i]$.

Для неотрицательных функций это означает (рис. 16), что интеграл на $[x_{i-1}; x_i]$, равный площади соответствующей криволинейной трапеции, заменяется площадью прямоугольника с тем же основанием и высотой $f(\xi_i)$. Поэтому формула (4) называется *формулой прямоугольников* для приближенного вычисления определенных интегралов.

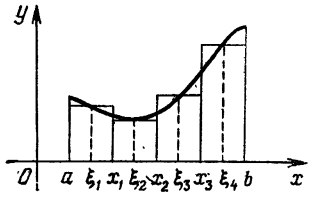


Рис. 16.

Следующая теорема дает оценку абсолютной погрешности приближения, получаемого по формуле прямоугольников, для функций, имеющих непрерывную вторую производную.

Теорема. *Если функция $f(x)$ имеет на отрезке $[a; b]$ непрерывную вторую производную, то*

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right) \right| \leqslant \frac{M(b-a)^3}{24n^2}, \qquad (5)$$

где M — наибольшее значение функции $|f''(x)|$ на $[a; b]$.

Эту теорему мы доказывать не будем.

Из формул (1) следует, что

$$\frac{x_{i-1}+x_i}{2} = a + \frac{b-a}{n}\left(i - \frac{1}{2}\right).$$

Следовательно, формулу прямоугольников можно записать в следующем виде:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(a + \frac{b-a}{n}\left(i - \frac{1}{2}\right)\right).$$

2. Формула трапеций. Пусть, как и выше, требуется вычислить интеграл от a до b от функции $f(x)$. Отрезок $[a; b]$ точками

$$x_i = a + \frac{b-a}{n} i, \qquad i = 0, 1, \ldots, n,$$

разобьем на n равных по длине отрезков и составим интегральные суммы

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}) \Delta x_i = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}), \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \Delta x_i = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i). \tag{2}$$

Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a; b]$, то

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}) \Delta x_i = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Поэтому при достаточно большом n каждую из интегральных сумм (1), (2) можно принять за приближение искомого интеграла. Однако в общем случае более точное приближение дает среднее арифметическое этих сумм:

$$\frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}.$$

Таким образом, имеет место формула

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}.$$

Эта формула называется *формулой трапеций* для приближенного вычисления определенных интегралов.

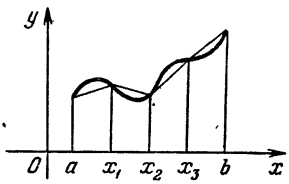


Рис. 17.

Для неотрицательной функции $f(x)$ эта формула имеет простой геометрический смысл. Именно, отрезок $[a; b]$ разбивается на n равных по длине отрезков, и площадь каждого кусочка криволинейной трапеции заменяется площадью трапеции с основаниями $f(x_{i-1})$, $f(x_i)$ и высотой $\frac{b-a}{n}$ (рис. 17).

Следующая теорема дает оценку абсолютной погрешности приближения, получаемого по формуле трапеций.

Теорема. *Если функция $f(x)$ имеет на отрезке $[a; b]$ непрерывную вторую производную, то*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}\right| \leqslant \frac{M(b-a)^3}{12n^2},$$

где M — наибольшее значение функции $|f''(x)|$ на $[a; b]$.

Эта теорема приводится без доказательства.

Так как

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}) = f(a) + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1}),$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1}) + f(b),$$

то

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2} = \frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i).$$

Таким образом, формулу трапеций можно записать в следующем виде:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2n}\left(f(a)+f(b)+2\sum_{i=1}^{n-1} f\left(a+\frac{b-a}{n}i\right)\right).$$

Пример 1. Вычислим $\int_0^1 e^{x^2}\,dx$ с точностью до 0,01.

Здесь

$$f(x) = e^{x^2}, \quad f'(x) = 2xe^{x^2}, \quad f''(x) = 4x^2e^{x^2} + 2e^{x^2}.$$

На отрезке $[0; 1]$

$$|f''(x)| \leqslant 6e.$$

Сначала применим формулу прямоугольников. Заданный интеграл нужно вычислить с точностью до 0,01, поэтому отрезок $[0; 1]$ нужно разделить на столько промежутков равной длины, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{6e}{24n^2} \leqslant 0{,}01, \qquad (3)$$

из которого следует, что

$$n \geqslant 5\sqrt{e}.$$

Так как $e < 2{,}89 = (1{,}7)^2$, то заведомо $n = 9$ удовлетворяет неравенству (3).

Следовательно,

$$\int_0^1 e^{x^2}\,dx \approx \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9} f\left(\frac{1}{9}\left(i-\frac{1}{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{9}\left\{f\left(\frac{1}{18}\right)+f\left(\frac{3}{18}\right)+f\left(\frac{5}{18}\right)+f\left(\frac{7}{18}\right)+\right.$$

$$\left.+f\left(\frac{9}{18}\right)+f\left(\frac{11}{18}\right)+f\left(\frac{13}{18}\right)+f\left(\frac{15}{18}\right)+f\left(\frac{17}{18}\right)\right\}$$

с точностью до 0,01.

Чтобы получить окончательный ответ, нужно еще вычислить значение функции $f(x) = e^{x^2}$ в указанных точках. В итоге получим 1,46.

Применим теперь формулу трапеций. В этом случае должно выполняться неравенство

$$\frac{6e}{12n^2} \leqslant 0{,}01,$$

т. е. $n \geqslant 10\sqrt{\frac{e}{2}}$. Этому неравенству удовлетворяет $n = 12$. Следовательно,

$$\int_0^1 e^{x^2}\,dx \approx \frac{1}{12}\left(\frac{1+e}{2}+\sum_{i=1}^{11} f\left(\frac{i}{12}\right)\right) \approx 1{,}46$$

с точностью до 0,01.

Пример 2 Вычислим $\int_0^1 \sqrt{x^2+1}\sin x\,dx$ с точностью до 0,01.

Здесь $f(x) = \sqrt{x^2+1}\sin x$. Находим

$$f''(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}\cos x + \frac{x^4}{(1+x^2)^{3/2}}\sin x.$$

Далее,

$$|f''(x)| \leqslant \sqrt{\frac{4x^2}{x^2+1}+\frac{x^8}{(1+x^2)^3}} \leqslant \sqrt{4-\frac{4}{x^2+1}+1} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{4-2+1} = \sqrt{3} < 2.$$

Следовательно, в формуле прямоугольников n должно удовлетворять неравенству

$$\frac{\sqrt{3}}{24n^2} \leqslant 0{,}01,$$

т. е.

$$n \geqslant \sqrt{\frac{100\sqrt{3}}{24}} = \frac{5}{\sqrt{2\sqrt{3}}}.$$

Легко видеть, что $n=3$ удовлетворяет этому неравенству. Таким образом, с точностью до 0,01

$$\int_0^1 \sqrt{x^2+1}\sin x\,dx \approx \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} f\left(\frac{1}{3}\left(i-\frac{1}{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left\{f\left(\frac{1}{6}\right)+f\left(\frac{3}{6}\right)+f\left(\frac{5}{6}\right)\right\} \approx 0{,}56.$$

В формуле трапеций n должно удовлетворять неравенству

$$n \geqslant \frac{5}{\sqrt{\sqrt{3}}}.$$

Этому неравенству удовлетворяет $n=4$. Следовательно,

$$\int_0^1 \sqrt{x^2+1}\sin x\,dx \approx$$

$$\approx \frac{1}{4}\left\{\frac{1}{2}\sqrt{2}\sin 1 + f\left(\frac{1}{4}\right)+f\left(\frac{2}{4}\right)+f\left(\frac{3}{4}\right)\right\} \approx 0{,}56.$$

Из рассмотренных примеров можно сделать вывод: сложность вычислений по формулам прямоугольников и трапеций примерно одинаковая.

Упражнения

3.14. Найдите приближенное значение интеграла $I=\int_0^1 \frac{dx}{1+x}=$ $=\ln 2 \approx 0{,}69315$ по формуле прямоугольников и по формуле трапеций при $n=10$.

3.15. Вычислите по формуле трапеций интеграл $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ с точностью до 0,001.

3.16. Вычислите двумя способами приближенное значение интеграла $I = \int_0^4 x^2\,dx = \frac{4^3}{3} \approx 21{,}33$, используя формулу прямоугольников и формулу трапеций для $n = 10$.

3.17. Вычислите интеграл $\int_0^3 \frac{dx}{x}$ по формуле трапеций, разбив промежуток интегрирования на 4 части.

Глава IV

ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

§ 12. Вычисление площадей плоских фигур с помощью определенного интеграла

Используя понятие определенного интеграла, дадим общий метод вычисления площадей плоских фигур. Как известно, определенный интеграл от неотрицательной непрерывной функции есть площадь соответствующей криволинейной трапеции. В этом заключается геометрический смысл определенного интеграла, на этом основано его применение к вычислению площадей плоских фигур.

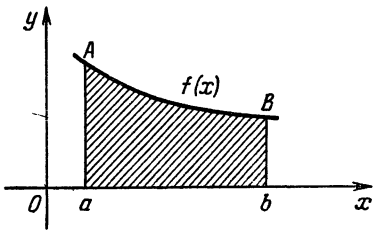


Рис. 18.

Рассмотрим криволинейную трапецию $aABb$, ограниченную графиком неотрицательной непрерывной функции $y=f(x)$, $x\in[a;\ b]$, отрезком $[a;\ b]$ оси Ox, отрезками прямых $x=a$ и $x=b$ $(a<b)$ (рис. 18). В этом случае площадь криволинейной трапеции, как известно, вычисляется по формуле

$$S=\int_a^b f(x)\,dx. \qquad (1)$$

Пример 1. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями $y=f(x)=x^2-2x+2$, $x=-1$, $x=2$ и отрезком $[-1;\ 2]$ оси Ox (рис. 19).

Решение. Данная плоская фигура представляет собой криволинейную трапецию, поэтому ее площадь вычисляется по формуле (1):

$$S=\int_{-1}^{2}(x^2-2x+2)\,dx=\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{2}-x^2\Big|_{-1}^{2}+2x\Big|_{-1}^{2}=6.$$

Пусть теперь функция $y=f(x)$, $x\in[a;\ b]$, — неположительная непрерывная функция. В этом случае график этой функции расположен под осью Ox (рис. 20) и

$$\int_a^b f(x)\,dx\leqslant 0.$$

Рассмотрев вспомогательную функцию $y=-f(x)$, $x\in[a;\ b]$, получим, что площадь криволинейной трапеции

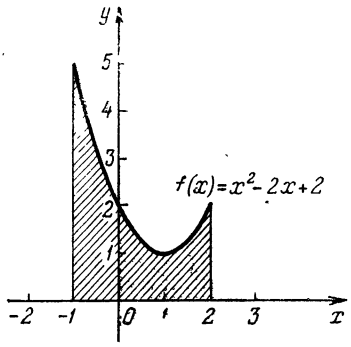


Рис. 19.

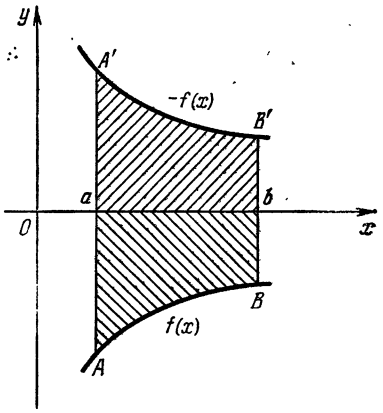


Рис. 20.

$aA'B'b$, ограниченной графиком функции $y=-f(x)$, отрезком $[a;\ b]$ оси Ox, отрезками прямых $x=a$ и $x=b$ $(a<b)$, вычисляется по формуле (1), т. е.

$$S=-\int_a^b f(x)\,dx. \qquad (2)$$

Рассмотрим теперь криволинейную трапецию $aABb$ (рис 20), ограниченную графиком функции $f(x)$, отрезком $[a;\ b]$ оси Ox, отрезками прямых $x=a$ и $x=b$ $(a<b)$. Так как график функции $y=-f(x)$ симметричен графику функции $y=f(x)$ относительно оси Ox, то криволинейные трапеции $aABb$ и $aA'B'b$ конгруэнтны.

Как известно, конгруэнтные фигуры имеют равные площади, поэтому площадь криволинейной трапеции $aABb$ также будет вычисляться по формуле (2).

Пример 2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=f(x)=\sqrt[3]{x}$, $x=-1$ и осью Ox (рис. 21).

Решение. График функции $f(x)=\sqrt[3]{x}$, $x\in[-1;\ 0]$, расположен под осью Ox, поэтому для вычисления площади данной плоской фигуры применим формулу (2):

$$S=-\int_{-1}^{0}\sqrt[3]{x}\,dx=-\frac{3}{4}x^{4/3}\Big|_{-1}^{0}=\frac{3}{4}.$$

Пусть теперь $f(x)$, $x\in[a;\ b]$, — непрерывная на отрезке $[a;\ b]$ функция, график которой пересекает отрезок $[a;\ b]$

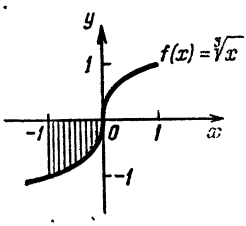


Рис. 21.

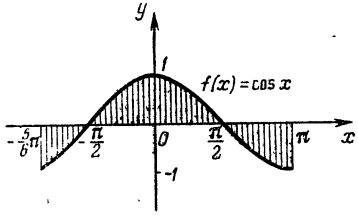


Рис. 22.

оси Ox в конечном числе точек. Из формул (1) и (2) следует, что площадь плоской фигуры, ограниченной графиком функции $f(x)$, отрезком $[a;\ b]$ оси Ox, отрезками прямых $x=a$ и $x=b$, вычисляется по формуле

$$S=\int_{a}^{b}|f(x)|\,dx. \tag{3}$$

Пример 3. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной отрезком $\left[-\frac{5\pi}{6};\ \pi\right]$ оси Ox, графиком функции $f(x)=\cos x$, отрезками прямых $x=-\frac{5\pi}{6}$ и $x=\pi$ (рис. 22).

Решение. Решив уравнение $\cos x=0$, получим, что график функции $y=\cos x$ на отрезке $\left[-\frac{5\pi}{6};\ \pi\right]$ пересекает ось Ox в точках $x_1=-\frac{\pi}{2}$, $x_2=\frac{\pi}{2}$. Следовательно,

по формуле (3)

$$S=\int\limits_{-5\pi/6}^{\pi}|\cos x|\,dx=$$

$$=-\int\limits_{-5\pi/6}^{-\pi/2}\cos x\,dx+\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos x\,dx-\int\limits_{\pi/2}^{\pi}\cos x\,dx=$$

$$=-\sin x\Big|_{-5\pi/6}^{-\pi/2}+\sin x\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}-\sin x\Big|_{\pi/2}^{\pi}=\frac{7}{2}.$$

Рассмотрим теперь фигуру σ, ограниченную отрезками прямых $x=a$ и $x=b$ $(a<b)$ и графиками неотрицательных непрерывных функций $f_1(x)$, $x\in[a;\,b]$, и $f_2(x)$, $x\in[a;\,b]$

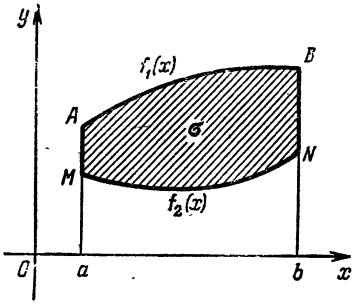


Рис. 23.

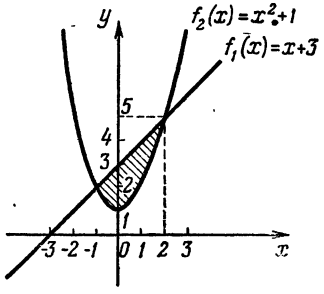


Рис. 24.

(рис. 23). Так как фигуру σ можно рассматривать как разность криволинейных трапеций $aABb$ и $aMNb$, то с учетом формулы (1) получим следующую формулу для вычисления площади фигуры σ:

$$S=\int\limits_a^b f_1(x)\,dx-\int\limits_a^b f_2(x)\,dx=\int\limits_a^b (f_1(x)-f_2(x))\,dx. \qquad (4)$$

Пример 4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=f_1(x)=x+3$ и $y=f_2(x)=x^2+1$ (рис. 24).

Решение. Решая уравнение $x+3=x^2+1$, найдем абсциссы точек пересечения графиков функций f_1 и f_2: $x_1=-1$ и $x_2=2$. Используя формулу (4), вычислим площадь фигуры:

$$S=\int\limits_{-1}^{2}(x+3-(x^2+1))dx=\int\limits_{-1}^{2}(-x^2+x+2)\,dx=$$

$$=-\frac{1}{3}x^3\Big|_{-1}^{2}+\frac{1}{2}x^2\Big|_{-1}^{2}+2x\Big|_{-1}^{2}=\frac{9}{2}.$$

Если требуется вычислить площадь плоской фигуры более сложного вида, то стараются выразить искомую площадь в виде алгебраической суммы площадей некоторых криволинейных трапеций. Так, например, площадь фигуры, изображенной на рис. 25, вычисляется по формуле

$$S = S_{aABb} - S_{aACc} - S_{cCBb}$$

Пусть кривые AB, BC и AC — соответственно графики

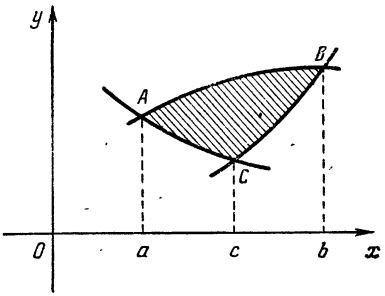


Рис. 25.

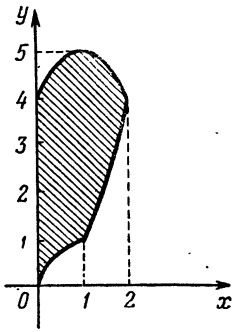


Рис. 26.

следующих функций: $y = f(x)$, $x \in [a; b]$, $y = \varphi(x)$, $x \in [a; c]$, и $y = \psi(x)$, $x \in [c; b]$. Тогда

$$S = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^c \varphi(x)\,dx - \int_c^b \psi(x)\,dx. \qquad (5)$$

Пример 5. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{x}$, $x \in [0; 1]$, $y = x^2$, $x \in [1; 2]$, и $y = -x^2 + 2x + 4$, $x \in [0; 2]$ (рис. 26)

Решение. Для нахождения площади воспользуемся формулой (5):

$$S = \int_0^2 (-x^2 + 2x + 4)\,dx - \int_0^1 \sqrt{x}\,dx - \int_1^2 x^2\,dx =$$

$$= -\frac{x^3}{3}\Big|_0^2 + x^2\Big|_0^2 + 4x\Big|_0^2 - \frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_0^1 - \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{19}{3}.$$

Упражнение

4.1. Вычислите площади следующих плоских фигур, ограниченных линиями:

а) $y=6x-x^2$, $y=0$;

б) $y=x^2+1$, $y=0$, $x=0$, $x=2$;

в) $y=8+2x-x^2$, $y=2x+4$;

г) $y=x^3-4x$, $y=0$;

д) $y=2x+16$, $y=8-7x-x^2$, $x=0$;

е) $y^2-4x=0$, $x-y=0$;

ж) $y^2=ax$, $x^2=by$;

з) $y^2=2x$, $2y=x^2$;

и) $y=\ln x$, $y=0$, $x=2$, $x=8$;

к) $y=\sin x$, $y=\frac{2}{\pi}x$;

л) $y=x^3$, $x+y=2$, $y=0$;

м) $y=\operatorname{tg} x$, $x=\frac{\pi}{3}$, $y=0$;

н) $y=\arcsin x$, $x=\frac{1}{2}$, $y=0$.

§ 13. Длина дуги кривой

Пусть дана кривая AB (рис. 27), уравнение которой $y=f(x)$, $x\in[a;\ b]$, где функция $f(x)$ непрерывно диффе-

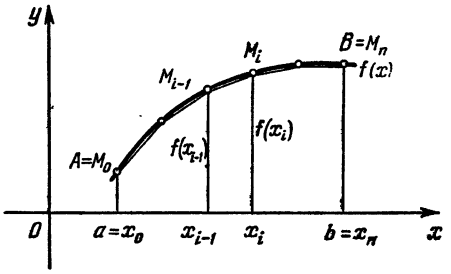


Рис. 27.

ренцируема на отрезке $[a;\ b]$. Разобьем отрезок $[a;\ b]$ точками

$$x_i=a+\frac{b-a}{n}i, \qquad i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

на n частей равной длины.

Через точки x_i проведем прямые, параллельные оси Oy. Точки пересечения этих прямых с кривой AB обозначим через M_i. Соединив эти точки хордами, получим ломаную $AM_1M_2\ldots M_{n-1}B$, вписанную в кривую AB. Пусть периметр этой ломаной равен P_n. *Длиной дуги* AB называется число l, равное пределу последовательности периметров (P_n):

$$l=\lim_{n\to\infty} P_n.$$

Замечание. В качестве ломаных, вписанных в кривую AB, можно брать любые ломаные. В этом случае предел последовательности (P_n) периметров ломаных, вписанных в данную кривую, при $\lambda\to 0$, где λ — длина наибольшего из звеньев этих ломаных, равен длине дуги кривой, т. е.

$$l=\lim_{\lambda\to 0} P_n.$$

Получим теперь формулу для вычисления длины дуги AB. Рассмотрим i-е звено ломаной $AM_1M_2\ldots M_{n-1}B$, вписанной в дугу AB; его концами являются точки $M_{i-1}(x_{i-1};\ f(x_{i-1}))$ и $M_i(x_i;\ f(x_i))$. Вычислим длину i-го звена $M_{i-1}M_i$, используя формулу расстояния между двумя точками:

$$l_i=|M_{i-1}M_i|=\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+(f(x_i)-f(x_{i-1}))^2}. \qquad (1)$$

Так как функция f непрерывно дифференцируема на отрезке $[a;\ b]$, то по формуле Лагранжа

$$f(x_i)-f(x_{i-1})=f'(\xi_i)(x_i-x_{i-1}), \qquad (2)$$

где ξ_i — некоторая точка интервала $]x_{i-1};\ x_i[$.

Подставив выражение (2) в формулу (1), получим

$$l_i=\sqrt{1+(f'(\xi_i))^2}\,\Delta x_i, \quad \text{где} \quad \Delta x_i=x_i-x_{i-1}.$$

Следовательно, периметр ломаной $AM_1M_2\ldots M_{n-1}B$ равен

$$P_n=\sum_{i=1}^{n} l_i=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+(f'(\xi_i))^2}\,\Delta x_i.$$

Мы получили интегральную сумму для непрерывной функции $\sqrt{1+(f'(x))^2}$ на отрезке $[a;\ b]$. Так как предел

этой суммы при $n \to \infty$ существует, то, согласно определению, будем иметь

$$l = \lim_{n \to \infty} P_n =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2}\, \Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

Итак,

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx. \qquad (3)$$

Рассмотрим интеграл с переменным верхним пределом

$$l(x) = \int_a^x \sqrt{1 + (f'(t))^2}\, dt.$$

Так как подынтегральная функция непрерывна, то, воспользовавшись теоремой о дифференцировании интеграла по верхнему пределу (см. п. 5 § 9), получим

$$\frac{dl}{dx} = \sqrt{1 + (f'(x))^2}.$$

Отсюда легко получается формула для дифференциала дуги

$$dl = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx,$$

или

$$dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}. \qquad (4)$$

Пусть кривая задана в параметрическом виде уравнениями

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta,$$

где φ и ψ имеют непрерывные производные на отрезке $[\alpha; \beta]$.

Тогда формула (4) примет вид

$$dl = \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\, dt,$$

а формула для вычисления длины дуги запишется в виде

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\, dt. \qquad (5)$$

Пример 1. Вычислить длину дуги полукубической параболы $y=x^{3/2}$ от ее вершины $A(0;\ 0)$ до точки $B(1;\ 1)$.

Решение. Для вычисления длины дуги воспользуемся формулой (3). Так как $y'=\frac{3}{2}x^{1/2}$, то

$$l=\int_0^1\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx=\frac{8}{27}\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{3/2}\Big|_0^1=\frac{13\sqrt{13}-8}{27}.$$

Пример 2. Вычислить длину окружности

$$x=R\cos t,\quad y=R\sin t,\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi.$$

Решение. Так как

$$x'=-R\sin t,\quad y'=R\cos t,$$

то, воспользовавшись формулой (5), вычислим длину одной четвертой части окружности:

$$l=\int_0^{\pi/2}\sqrt{(x')^2+(y')^2}\,dt=\int_0^{\pi/2}\sqrt{R^2\sin^2 t+R^2\cos^2 t}\,dt=$$

$$=R\int_0^{\pi/2}dt=\frac{\pi}{2}R.$$

Следовательно, длина окружности $C=4l=2\pi R$.

Пример 3. Вычислить длину одной арки циклоиды

$$x=a(t-\sin t),\quad y=a(1-\cos t),\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi$$

Решение. Так как $x'=a(1-\cos t)$, $y'=a\sin t$, то, используя формулу (5), получим

$$l=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\,dt=2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt=8a.$$

Упражнение

4.2. Вычислите длины дуг следующих кривых:

а) $y=\sqrt{x}$, $0\leqslant x\leqslant 1$;

б) $y=\ln x$, $\sqrt{3}\leqslant x\leqslant\sqrt{8}$;

в) $y=e^x$, $0\leqslant x\leqslant 1$;

г) $y=\ln\cos x$, $0\leqslant x\leqslant\alpha<\frac{\pi}{2}$;

д) $x=a(\cos t+t\sin t)$, $y=a(\sin t-t\cos t)$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$;

е) $x=e^t\cos t$, $y=e^t\sin t$, $0\leqslant t\leqslant\ln\pi$;

ж) $x=\frac{1}{3}t^3-t$, $y=t^2+2$, $0\leqslant t\leqslant 3$;

з) $y=\frac{a}{2}\left(e^{x/a}+e^{-x/a}\right)$ между точками, абсциссы которых равны 0 и a;

и) $y=\ln\sin x$ между точками, абсциссы которых равны $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{3}$;

к) $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$.

§ 14. Применение определенного интеграла при решении физических и технических задач

1. Задача о вычислении пути. Пусть материальная точка движется прямолинейно с некоторой мгновенной скоростью $v=v(t)$. Требуется найти путь, который пройдет тело за промежуток времени от $t=T_1$ до $t=T_2$.

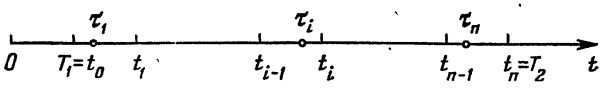


Рис. 28.

В простейшем случае, если мгновенная скорость постоянна, т. е. $v(t)=v_0=\text{const}$, то путь, пройденный телом, равен (по определению, известному из курса физики) произведению скорости на время движения:

$$s=v_0(T_2-T_1).$$

В общем случае, когда мгновенная скорость не постоянна, поступают следующим образом.

Промежуток времени $[T_1; T_2]$ разбивают точками $t_0=T_1, t_1, \ldots, t_{n-1}, t_n=T_2$ $(t_0<t_1<\ldots<t_n)$ на n отрезков $[t_{i-1}; t_i]$, $i=1, 2, \ldots, n$, одинаковой длины (рис. 28)

$$\Delta t_i=t_i-t_{i-1}=\frac{T_2-T_1}{n}.$$

Далее, выбрав на каждом отрезке $[t_{i-1}; t_i]$ произвольную точку τ_i, составляют сумму

$$\sum_{i=1}^{n} v(\tau_i)\,\Delta t_i. \qquad (1)$$

Каждое слагаемое $v(\tau_i)\,\Delta t_i$ этой суммы дает приближенное значение пути, пройденного телом за время от $t=$

$= t_{i-1}$ до $t = t_i$. Следовательно, путь, пройденный телом за время от $t = T_1$ до $t = T_2$, приближенно выражается суммой (1).

Легко видеть, что приближение будет тем лучше, чем мельче отрезки деления $[t_{i-1}; t_i]$, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$. Поэтому путь s, пройденный телом за отрезок времени $[T_1; T_2]$, определяется как предел суммы (1) при $n \to \infty$:

$$s = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} v(\tau_i)\,\Delta t_i.$$

Поскольку последний предел, согласно определению, есть определенный интеграл от функции $v(t)$ на отрезке $[T_1; T_2]$, то путь, пройденный телом за промежуток времени $[T_1; T_2]$, вычисляется по формуле

$$s = \int_{T_1}^{T_2} v(t)\,dt. \qquad (2)$$

Пример 1. Тело движется прямолинейно со скоростью $v(t) = (3t^2 + 4t + 1)$ м/с. Найти путь, пройденный телом за первые 3 с.

Решение. По формуле (2) получим

$$s = \int_0^3 (3t^2 + 4t + 1)\,dt = (t^3 + 2t^2 + t)\Big|_0^3 = 48 \text{ (м)}.$$

Пример 2 Точка движется прямолинейно со скоростью $v(t) = at + v_0$. Какой путь пройдет точка за промежуток времени от $t = T_1$ до $t = T_2$?

Решение. По формуле (2) получим

$$s = \int_{T_1}^{T_2} (at + v_0)\,dt = \left(\frac{at^2}{2} + v_0 t\right)\Big|_{T_1}^{T_2} =$$

$$= \frac{a}{2}(T_2^2 - T_1^2) + v_0(T_2 - T_1).$$

Пример 3. Тело движется прямолинейно со скоростью $v(t) = 16t - 4t^2$. Найти длину пути, пройденного телом от начала движения до его остановки.

Решение. Скорость тела в моменты начала его движения и остановки равна нулю. Найдем момент остановки тела. Приравняв для этого его скорость к нулю и решив уравнение, получим

$$16t - 4t^2 = 0, \quad t_1 = 0, \quad t_2 = 4.$$

Далее, по формуле (2) имеем

$$s=\int_0^4 (16t-4t^2)\,dt=\left(8t^2-\frac{4}{3}t^3\right)\Big|_0^4=\frac{128}{3}.$$

2. Задача о силе давления жидкости. Пусть пластинка в виде криволинейной трапеции погружена вертикально в жидкость с плотностью ρ так, что ее боковые стороны параллельны поверхности жидкости и находятся ниже ее уровня соответственно на расстоянии a и b (рис. 29). Требуется определить силу давления жидкости на пластинку.

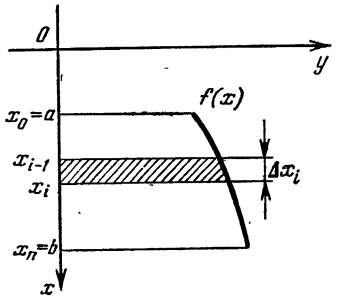


Рис. 29.

Если пластинка находится в горизонтальном положении на глубине h от поверхности (уровня) жидкости, то сила давления P жидкости в ньютонах на горизонтальную пластинку будет равна весу столба жидкости, имеющего основанием данную пластинку, а высотой — глубину h, т. е.

$$P=g\rho hS, \qquad (1)$$

где S — площадь пластинки.

Если же пластинка погружена в жидкость вертикально, то по формуле (1) давление жидкости на пластинку не может быть вычислено, так как в этом случае давление жидкости на единицу площади пластинки изменяется с глубиной погружения, т. е. зависит от расстояния площадки до поверхности жидкости.

При решении задачи будем учитывать тот факт, что по закону Паскаля давление в жидкости передается одинаково во всех направлениях, в том числе и на вертикальную площадку.

Для решения задачи разобьем пластинку на n частей (малых горизонтальных полосок) прямыми, параллельными поверхности жидкости (т. е. параллельными оси Oy) и проходящими через точки $x_0=a$, x_1, ..., x_{n-1}, $x_n=b$, где

$$x_i=a+\frac{b-a}{n}i, \quad i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n$$

Выделим одну из полосок (на рис. 29 она заштрихована), находящуюся на глубине x_i. Для достаточно узкой полоски давление во всех ее частях можно считать приближенно одинаковым, а саму полоску можно принять за прямоугольник с высотой $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$ и основанием, равным нижнему основанию полоски. Легко видеть, что длина основания прямоугольника является функцией от x. Обозначим эту функцию через $f(x)$, $x \in [a; b]$. Таким образом, силу давления P_i на i-ю полоску можно вычислить по формуле (1), т. е.

$$P_i \approx g\rho f(x_i) x_i \Delta x_i.$$

Просуммировав силы давления жидкости на все полоски, найдем приближенное значение силы давления жидкости на всю пластинку:

$$P \approx \sum_{i=1}^{n} g\rho f(x_i) x_i \Delta x_i.$$

Точность приближенного равенства тем больше, чем короче отрезки $[x_{i-1}; x_i]$, на которые разбит отрезок $[a; b]$.

Таким образом, точное значение силы давления жидкости на пластинку определяется по формуле

$$P = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} g\rho f(x_i) x_i \Delta x_i.$$

Согласно определению, последний предел есть определенный интеграл от функции $xf(x)$ на отрезке $[a; b]$, поэтому сила давления жидкости на пластинку вычисляется по формуле

$$P = g \int_a^b \rho x f(x)\, dx. \qquad (2)$$

Пример 1. Аквариум имеет форму прямоугольного параллелепипеда. Найти силу давления воды (плотность воды 1000 кг/м³), наполняющей аквариум, на одну из его вертикальных стенок, размеры которой 0,4 м × 0,7 м (рис. 30).

Решение. Выберем систему координат так, чтобы оси Oy и Ox соответственно содержали верхнее основание и вертикальную стенку аквариума (рис. 30). Для нахождения силы давления воспользуемся формулой (2).

Стенка имеет форму прямоугольника, поэтому $f(x)=0{,}7$, $x\in[0;\ 0{,}4]$. Так как пределы интегрирования $a=0$ и $b=0{,}4$, то получим

$$P=g\int_0^{0,4}1000\cdot 0{,}7\cdot x\,dx=700g\frac{x^2}{2}\Big|_0^{0,4}=56g.$$

Учитывая, что $g\approx 9{,}8$ м/с^2, имеем $P\approx 548{,}8$ Н.

Пример 2. Определить силу давления масла (плотность масла 900 кг/м^3) на вертикальную стенку, имеющую

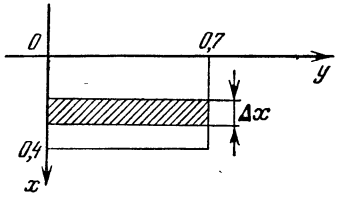


Рис. 30.

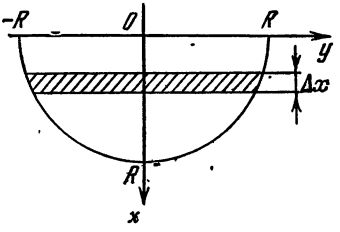


Рис. 31.

форму полукруга радиуса $R=5$ м, диаметр которого находится на поверхности масла.

Решение. Выберем систему координат так, как показано на рис. 31. Так как стенка есть полукруг радиуса $R=5$, то $f(x)=\sqrt{5^2-x^2}$, $x\in[0;\ 5]$. Воспользуемся для нахождения силы давления формулой (2). Для данного случая $\rho=900$ кг/м^3, $a=0$, $b=5$, поэтому

$$P=2g\int_0^5 900x\sqrt{5^2-x^2}\,dx=900g\cdot\frac{2}{3}(5^2-x^2)^{3/2}\Big|_5^0=$$

$$=600g\cdot 5^3=75000g.$$

Так как $g\approx 9{,}8$ м/с^2, то $P\approx 735$ кН.

3. Работа переменной силы. Пусть материальная точка под действием силы F движется по прямой. Если действующая сила постоянна, а пройденный путь равен s, то, как известно из курса физики, работа A этой силы F вычисляется по формуле

$$A=F\cdot s. \qquad (1)$$

Перейдем теперь к рассмотрению вопроса о нахождении работы переменной силы. Пусть материальная точка движется по оси Ox под действием силы, проекция кото-

рой на ось Ox есть функция от x. Будем обозначать ее через $f(x)$ и предполагать, что f есть непрерывная функция. Пусть под действием силы F материальная точка переместилась из точки $M(a)$ в точку $M(b)$ (рис. 32). Докажем, что в этом случае работа вычисляется по формуле

$$A = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{2}$$

Разобьем отрезок $[a; b]$ точками $x_i = a + \frac{b-a}{n} i$ на n частей $[x_{i-1}; x_i]$ одинаковой длины $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$. На каждом отрезке $[x_{i-1}; x_i]$ работу силы можно приближенно вычислять по формуле (1), т. е. считать ее равной $f(\xi_i)\,\Delta x_i$,

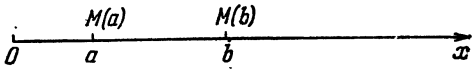


Рис. 32.

где ξ_i — некоторая точка отрезка $[x_{i-1}; x_i]$. Тогда работа силы на отрезке $[a; b]$ будет приближенно выражаться по формуле

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i.$$

Точность приближения будет тем лучше, чем короче отрезки $[x_{i-1}; x_i]$, на которые разбит отрезок $[a; b]$. Поэтому, переходя в последнем равенстве к пределу при $n \to \infty$, получим

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{3}$$

Таким образом, работа переменной силы вычисляется по формуле (3).

Пример 1. Сила упругости пружины, растянутой на 0,05 м, равна 3 Н. Какую работу надо произвести, чтобы растянуть пружину на эти 0,05 м?

Решение. По закону Гука сила F, растягивающая или сжимающая пружину, пропорциональна этому растя-

жению или сжатию, т. е. $F=kx$, где x — величина растяжения или сжатия, k — коэффициент пропорциональности. Из условия следует, что $3=k\cdot 0{,}05$, т. е. $k=60$; следовательно, $F=60x$.

Используя формулу (3), получим

$$A=\int_0^{0{,}05} 60x\,dx=30x^2\Big|_0^{0{,}05}=0{,}075\ (\text{Дж}).$$

Пример 2. Пружина в спокойном состоянии имеет длину 20 см. Сила в 10 кг растягивает ее на 2 см. Определить работу, затраченную на растяжение пружины от 25 см до 35 см.

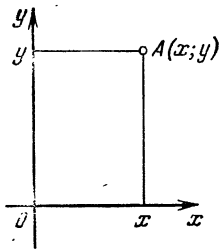


Рис. 33.

Решение. Выразим данные задачи в единицах системы СИ: 2 см = =0,02 м; 20 см = 0,2 м; $F=10$ кг = =98,1 Н; 25 см = 0,25 м и 35 см = =0,35 м Используя условия задачи и закон Гука, получим: $98{,}1=k\cdot 0{,}02$ или $k=4905$. Следовательно, $F=4905x$. Так как для данного случая $a=0{,}25-0{,}2=0{,}05$ и $b=0{,}35-0{,}2=0{,}15$, то, используя формулу (3), получим

$$A=4905\int_{0{,}05}^{0{,}15} x\,dx=4905\,\frac{x^2}{2}\Big|_{0{,}05}^{0{,}15}\approx 49{,}05\ (\text{Дж}).$$

4. Статические моменты и координаты центра масс. Пусть на плоскости задана прямоугольная декартова система координат xOy. Напомним, что *статическими моментами материальной точки* $A(x;\ y)$, в которой сосредоточена масса m, относительно осей Ox и Oy (рис. 33) называются произведения массы этой точки соответственно на ординату и абсциссу этой точки, т. е.

$$M_x=my \quad \text{и} \quad M_y=mx.$$

Если дана система n материальных точек $A_1(x_1;\ y_1)$, $A_2(x_2;\ y_2)$, ..., $A_n(x_n;\ y_n)$, в которых сосредоточены массы $m_1, m_2, \ldots, m_n$, то *статическими моментами этой системы* относительно осей Ox и Oy будут

$$M_x=\sum_{i=1}^{n} m_i y_i \quad \text{и} \quad M_y=\sum_{i=1}^{n} m_i x_i.$$

Центром масс такой системы материальных точек называется точка, обладающая тем свойством, что если в ней сосредоточить всю массу системы $m=\sum_{i=1}^{n} m_i$, то статический момент этой точки относительно любой оси равен статическому моменту данной системы точек относительно той же оси. Поэтому, если обозначить центр масс системы через $C(x_C; y_C)$, то получим

$$M_x=\sum_{i=1}^{n} m_i y_i = m y_C, \tag{1}$$

$$M_y=\sum_{i=1}^{n} m_i x_i = m x_C \tag{2}$$

Таким образом, координаты центра масс системы материальных точек вычисляются по следующим формулам:

$$x_C=\frac{M_y}{m}=\frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}, \tag{3}$$

$$y_C=\frac{M_x}{m}=\frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}. \tag{4}$$

В случае линии или плоской фигуры для нахождения статических моментов и координат центра масс используется определенный интеграл.

Статические моменты и координаты центра масс плоской кривой. Пусть кривая AB длины l является графиком функции $f(x)$, $x\in[a; b]$, имеющей непрерывную производную. Будем считать, что кривая AB однородна, т. е. линейная плотность ρ распределения массы постоянна. Если $\rho=1$, то масса, распределенная на данной кривой, равна численно длине. Разобьем кривую на части длины Δl_i. Приняв эти части массы $\Delta m_i=\Delta l_i$ за материальные точки, лежащие на расстоянии y_i от оси Ox и расстоянии x_i от оси Oy, получим

$$\Delta M_{x_i}=y_i\,\Delta m_i=y_i\,\Delta l_i \quad \text{и} \quad \Delta M_{y_i}=x_i\,\Delta m_i=x_i\,\Delta l_i.$$

Так как $\Delta l_i \approx \sqrt{1+(f'(x_i))^2}\,\Delta x_i$, то

$$\Delta M_{x_i} \approx f(x_i)\sqrt{1+(f'(x_i))^2}\,\Delta x_i,$$

$$\Delta M_{y_i} \approx x_i\sqrt{1+(f'(x_i))^2}\,\Delta x_i.$$

Просуммировав по всем частям разбиения кривой AB, в пределе получим

$$M_x = \int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx, \tag{5}$$

$$M_y = \int_a^b x\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx. \tag{6}$$

Кроме того,

$$m = l = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx. \tag{7}$$

Воспользовавшись равенствами (3)—(7), получим формулы для нахождения координат центра масс плоской кривой:

$$x_C = \frac{\int_a^b x\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx}{\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx}, \tag{8}$$

$$y_C = \frac{\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx}{\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx}. \tag{9}$$

Замечание. Если плотность ρ постоянна, но $\rho \neq 1$, то в формулах (5)—(7) для вычисления статических моментов и массы плоской кривой правые части надо умножить на ρ. Формулы же (8) и (9) для вычисления координат центра масс останутся без изменения.

Используя формулу (9), установим один важный геометрический факт. Так как

$$y_C \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx = \int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx,$$

то, умножив последнее равенство на 2π, получим

$$S = 2\pi y_C l,$$

ибо длина дуги кривой вычисляется по формуле

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx,$$

а площадь поверхности вращения — по формуле

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

Итак, имеет место следующее утверждение.

Площадь поверхности, образованной при вращении кривой вокруг оси, лежащей с ней в одной плоскости и не пересекающей ее, равна длине дуги, умноженной на длину окружности, которую описывает при этом вращении центр масс дуги. Это утверждение называется *первой теоремой Гульдена.*

Пример 1. Найти статические моменты относительно осей координат и координаты центра масс полуокружности $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ $(-R \leqslant x \leqslant R)$.

Решение. Так как $y' = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$, то $\sqrt{1 + (y')^2} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}$. Поэтому, используя формулы (5) и (6), будем иметь

$$M_x = \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\, \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}\, dx = R \int_{-R}^{R} dx = 2R^2,$$

$$M_y = \int_{-R}^{R} x\, \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}\, dx = -R \sqrt{R^2 - x^2}\Big|_{-R}^{R} = 0.$$

Длина полуокружности равна πR, поэтому из формул (8) и (9) получаем, что координатами центра масс будут

$$y_C = \frac{2R^2}{\pi R} = \frac{2R}{\pi}, \quad x_C = \frac{0}{\pi R} = 0.$$

Итак, $C\left(0; \frac{2R}{\pi}\right)$.

Пример 2. Найти координаты центра масс дуги окружности $x^2+y^2=R^2$, расположенной в первой координатной четверти.

Решение. Данная фигура симметрична относительно биссектрисы первого координатного угла, поэтому ордината и абсцисса центра масс этой фигуры равны. Для нахождения ординаты центра масс воспользуемся первой теоремой Гульдена. Легко видеть, что при вращении четверти окружности вокруг оси получится половина сферы, следовательно, ее площадь будет равна $2\pi R^2$. Так как длина четверти окружности равна $\frac{\pi R}{2}$, то согласно теореме получаем

$$2\pi R^2 = 2\pi y_C \cdot \frac{\pi R}{2}, \quad \text{т. е.} \quad y_C = \frac{2R}{\pi}.$$

Таким образом, $C\left(\frac{2R}{\pi}; \frac{2R}{\pi}\right)$.

Статические моменты и координаты центра масс плоской фигуры. Пусть дана криволинейная трапеция, ограниченная графиком неотрицательной функции $y=f(x)$, $x\in[a; b]$, осью Ox, прямыми $x=a$ и $x=b$, по которой непрерывно распределена масса с плотностью $\rho=1$. Тогда масса криволинейной трапеции численно равна ее площади. Для вычисления статических моментов M_x и M_y криволинейной трапеции разобьем ее на n частей (рис. 34) прямыми, параллельными оси ординат и проходящими через точки

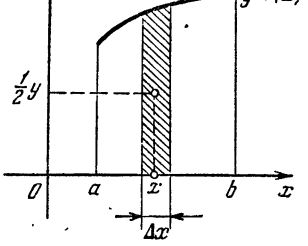


Рис. 34.

$$x_i = a + \frac{b-a}{n} i,$$

$$i = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Масса одной такой части $\Delta S_i \approx y_i \Delta x_i$. Сосредоточив массу части в ее центре масс $\left(x_i; \frac{y_i}{2}\right)$, получим

$$\Delta M_{x_i} = y_i \Delta x_i \cdot \frac{y_i}{2} = \frac{y_i^2}{2} \Delta x_i,$$

$$\Delta M_{y_i} = y_i \Delta x_i \cdot x_i = x_i y_i \Delta x_i.$$

Просуммировав по всем i, в пределе получим

$$M_x = \frac{1}{2}\int_a^b y^2\,dx, \tag{10}$$

$$M_y = \int_a^b xy\,dx. \tag{11}$$

Используя формулы (3) и (4), находим формулы для вычисления центра масс:

$$x_C = \frac{M_y}{m} = \frac{\int_a^b xy\,dx}{\int_a^b y\,dx}, \tag{12}$$

$$y_C = \frac{M_x}{m} = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b y^2 dx}{\int_a^b y\,dx}. \tag{13}$$

Умножив последнее равенство на $2\pi m$, получим

$$2\pi y_C \cdot m = \pi \int_a^b y^2\,dx. \tag{14}$$

Легко видеть, что в правой части равенства (14) стоит объем тела вращения. Итак,

$$V = S \cdot 2\pi y_C,$$

т. е. *объем тела вращения, образованного при вращении вокруг оси абсцисс криволинейной трапеции, равен площади этой трапеции, умноженной на длину окружности, которую описывает при этом вращении центр ее масс.* Это утверждение называется *второй теоремой Гульдена.*

Пример 3. Найти статический момент относительно оси Ox пластинки, ограниченной одной аркой циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \in [0;\ 2\pi]$, и ее основанием.

Решение. Используя формулу (10), имеем

$$M_x = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} y^2\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^3(1-\cos t)^3\,dt = \frac{5a^3}{2}\pi.$$

Пример 4. Найти координаты центра масс полукруга

$$x^2+y^2 \leqslant r^2, \quad y \geqslant 0.$$

Решение. Для нахождения ординаты воспользуемся второй теоремой Гульдена: $y_C = \frac{V}{2\pi S}$. Так как для шара $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, а площадь полукруга $S = \frac{\pi r^2}{2}$, то

$$y_C = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{2\pi\frac{\pi r^2}{2}} = \frac{4r}{3\pi}.$$

Из симметрии фигуры относительно оси ординат следует, что $x_C = 0$. Итак, $C\left(0; \frac{4r}{3\pi}\right)$.

Упражнения

4.3. Тело движется прямолинейно со скоростью $v(t) = (2t^2+1)$ м/с. Найдите путь, пройденный телом за первые 5 с.

4.4. Тело движется прямолинейно со скоростью $v(t) = (2t^3+1)$ м/с. Найдите путь, пройденный телом за промежуток времени от $t=1$ с до $t=3$ с.

4.5. Скорость тела, движущегося прямолинейно, задается формулой $v(t) = (12t-3t^2)$ м/с. Найдите путь, пройденный телом от начала его движения до остановки.

4.6. Два тела начали двигаться по прямой в один и тот же момент из одной точки в одном направлении соответственно со скоростями $v_1(t) = (6t^2+4t)$ м/с и $v_2(t) = 4t$ м/с. Через сколько секунд расстояние между ними будет равно 250 м?

4.7. Тело движется прямолинейно со скоростью $v(t) = (4t+a)$ м/с. Найдите a, если известно, что путь, пройденный телом за 2 с от начала движения, равен 48 м.

4.8. Тело движется по прямой со скоростью $v(t) = (6t+4)$ м/с. Найдите длину пути, пройденного телом за третью секунду.

4.9. Найдите путь, пройденный точкой за промежуток времени от $t=0$ с до $t=5$ с, если точка двигалась прямолинейно со скоростью $v(t) = (9{,}8t-0{,}003t^2)$ м/с.

4.10. Скорость движущейся по прямой точки меняется по закону $v(t) = (Rt+a\sqrt{t})$ м/с. Найдите путь, пройденный этой точкой за промежуток времени от $t=0$ с до $t=4$ с.

4.11. Определите давление воды на стенку шлюза, длина которой 20 м и высота 5 м, считая шлюз доверху заполненным водой.

4.12. Вычислите давление воды на плотину, имеющую форму трапеции, верхнее основание которой равно a, нижнее b $(a > b)$, высота H. Предполагается, что поверхность воды достигает верхнего края плотины. Подсчитайте давление для случая $a=400$ м, $b=200$ м, $H=20$ м.

4.13. Определите силу давления воды на вертикальную стенку, имеющую форму полукруга радиуса $R=6$ м, диаметр которого находится на поверхности воды.

4.14. Определите давление воды на вертикальный прямоугольный шлюз с основанием 10 м и высотой 6 м. Определите также давление на нижнюю половину шлюза.

4.15. Найдите давление бензина, находящегося в цилиндрическом баке высотой $h=3{,}5$ м и радиусом $r=1{,}5$ м, на его стенки, если плотность бензина $\rho=900$ кг/м^3.

4.16. Вычислите силу давления воды на треугольную пластину с основанием a и высотой H, вертикально в нее погруженную (основание совпадает с уровнем воды).

4.17. Вычислите силу давления воды на вертикальную заслонку, закрывающую трубу, если труба, лежащая горизонтально, наполовину наполнена водой. Известно, что поперечным сечением трубы является круг диаметром 6 м.

4.18. Вычислите силу давления на боковую поверхность вертикальной круглой цистерны, которая наполнена водой; диаметр цистерны равен 3 м и высота 4 м.

4.19. Вычислите общую силу давления воды на дно и стенки аквариума, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда, если стороны основания равны 0,9 м и 0,6 м а высота 0,4 м. Аквариум доверху наполнен водой.

4.20. Вычислите работу, которую надо затратить на сжатие пружины на 0,1 м, если для сжатия ее на 0,01 м нужна сила в 78 Н.

4.21. Рессора прогибается под нагрузкой 2 Дж на 1 см. Какую работу надо затратить для деформации рессоры на 3 см?

4.22. Вычислите работу, совершенную при сжатии пружины на 25 см, если известно, что действующая сила пропорциональна сжатию пружины и для сжатия на 1 см необходима сила в 40 Н.

4.23. Вычислите работу, затраченную при сжатии винтовой пружины на 6 см, если известно, что при сжатии пружины на 0,2 см была затрачена сила 3,2 Н.

4.24. Пружина растягивается на 0,02 м под действием силы в 50 Н. Какую надо совершить работу, чтобы растянуть пружину до 0,45 м?

4.25. При сжатии пружины на 1 см затрачивается работа в 100 Дж. Какую работу надо произвести при сжатии пружины на 5 см?

4.26. Сжатие пружины пропорционально приложенной силе. Вычислите работу при сжатии на 7 см, если для сжатия на 1 см нужна сила в 10 Н.

4.27. Какую работу надо затратить на сжатие пружины на 4 см, если известно, что сила в 2 Н сжимает эту пружину на 1 см?

4.28. Сила в 6 Н растягивает пружину на 2 см. Какую работу надо произвести, чтобы растянуть пружину на 6 см?

4.29. Силой в 80 Н пружина растягивается на 0,02 м. Первоначальная длина пружины 0,15 м. Какую работу надо совершить, чтобы растянуть ее до 0,2 м?

4.30. Найдите статический момент дуги цепной линии $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$, $0 \leqslant x \leqslant a$, относительно оси Ox.

4.31. Найдите статические моменты дуги параболы $y^2 = 2x$ $(y > 0)$, $0 \leqslant x \leqslant 2$, относительно осей Ox и Oy.

4.32. Найдите статический момент относительно оси Ox дуги косинусоиды $y = \cos x$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$.

4.33 Найдите центр масс фигуры, ограниченной кривой $y = 2\sqrt{x}$, осью Ox и прямой $x = 1$.

4.34. Найдите центр масс фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 20x$ и $x^2 = 20y$.

4.35. Найдите центр масс ветви циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

4.36. Найдите центр масс фигуры, ограниченной дугой эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ лежащей в первом квадранте, и осями координат.

4.37. Найдите координаты центра масс параболического сегмента, ограниченного линиями $y = 4 - x^2$, $y = 0$.

4.38. Пользуясь первой теоремой Гульдена, найдите центр масс полуокружности радиуса a.

4.39. Вычислите по теоремам Гульдена площадь боковой поверхности и объем прямого конуса с высотой H и радиусом основания r.

4.40. Пользуясь теоремами Гульдена, вычислите площадь поверхности и объем тела, полученного вращением равностороннего треугольника со стороной, равной a, вокруг оси, отстоящей от его центра масс на расстояние d $(d > a)$.

Глава V

ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ И КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 15. Функции многих переменных

1. Определение функции многих переменных. Рассмотрим функцию $f(M)$, $M \in G$, которая каждой точке M множества G (плоскости или пространства) ставит в соответствие некоторое число $f(M)$. Если G — множество точек координатной плоскости, то вместо $f(M)$ пишут $f(x; y)$, где x, y — координаты точки $M \in G$, и говорят, что задана функция двух переменных $f(x; y)$, $(x; y) \in G$.

Таким образом, *функцией двух переменных* $f(x; y)$, $(x; y) \in G$, называется функция, которая каждой паре чисел $(x; y) \in G$ ставит в соответствие некоторое число $f(x; y)$.

Например,

$$f(x; y) = x^2 + y^2, \quad (x; y) \in R^2,$$

— функция двух переменных x и y, определенная для всевозможных значений переменных x, y, т. е. на всей координатной плоскости R^2. Она каждой точке $(x; y) \in R^2$ ставит в соответствие число $z = x^2 + y^2$.

Аналогично определяются функции трех и большего числа переменных.

Например,

$$f_1(x; y; z) = \frac{\sqrt{z^2 - 1}}{x^2 + y^2},$$

$$f_2(x; y; z; t) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \sin t.$$

Функция f_1 — функция трех переменных x, y и z, определенная для всех значений x, y, z, удовлетворяющих неравенствам $x^2 + y^2 \neq 0$ и $z^2 \geqslant 1$. Она каждой точке $(x; y; z)$ из указанного множества ставит в соответствие число $u = \frac{\sqrt{z^2 - 1}}{x^2 + y^2}$.

Функция f_2 — функция четырех переменных x, y, z и t, определенная для всевозможных значений переменных x, y, z, t. Можно считать, что x, y, z — это координаты точки пространства, а t — время. Функция f_2 каждой четверке чисел $(x;\ y;\ z;\ t)$ ставит в соответствие число $u = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\sin t$.

В дальнейшем для краткости все определения и утверждения будем формулировать лишь для функций двух переменных. На функции трех и большего числа переменных, как это будет видно, они легко обобщаются.

2. Непрерывность функций многих переменных. Функция $f(x;\ y)$, $(x;\ y)\in G$, называется *непрерывной в точке* $(x_0;\ y_0)\in G$, если для любой последовательности точек $(x_n;\ y_n)\in G$ такой, что $x_n \to x_0$, $y_n \to y_0$ при $n \to \infty$, последовательность $(f(x_n;\ y_n))$ сходится и

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n;\ y_n) = f(x_0;\ y_0).$$

Функция $f(x;\ y)$ называется *непрерывной на множестве* G, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Пример 1. Показать, что функция

$$f(x;\ y) = \frac{x}{x^2-y^2}$$

непрерывна в любой точке своей области определения.

Решение. Данная функция определена во всех точках $(x;\ y)$, кроме точек, у которых $x^2 = y^2$. Пусть $(x_0; y_0)$ — некоторая точка из области определения функции f, т. е. $x_0^2 \neq y_0^2$. Теперь для любой последовательности точек $(x_n; y_n)$ такой, что $x_n^2 \neq y_n^2$ и $x_n \to x_0$, $y_n \to y_0$ при $n \to \infty$, имеем

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n;\ y_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{x_n^2-y_n^2} = \frac{x_0}{x_0^2-y_0^2} = f(x_0;\ y_0).$$

Следовательно, данная функция непрерывна в произвольной точке $(x_0;\ y_0)$ из области определения.

Заметим, что здесь мы воспользовались свойствами пределов последовательностей.

Пример 2. Показать, что функция трех переменных

$$f(x;\ y;\ z) = \frac{\sqrt{1-z^2}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

непрерывна в любой точке из области определения.

Решение. Данная функция определена на множестве G точек $(x;\ y;\ z)$, удовлетворяющих неравенствам $|z| \leqslant 1$, $x^2+y^2<1$.

Пусть $(x_0;\ y_0;\ z_0) \in G$. Тогда для любой последовательности точек $(x_n;\ y_n;\ z_n) \in G$ такой, что $x_n \to x_0$, $y_n \to y_0$, $z_n \to z_0$ при $n \to \infty$, имеем

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n;\ y_n;\ z_n) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1-z_n^2}}{\sqrt{1-x_n^2-y_n^2}} = \frac{\sqrt{1-z_0^2}}{\sqrt{1-x_0^2-y_0^2}} = f(x_0;\ y_0;\ z_0),$$

что и требовалось доказать.

Как и для функций одной переменной, для функций многих переменных доказываются следующие утверждения:

сумма и произведение двух непрерывных на множестве G функций являются непрерывными на G функциями;

отношение двух непрерывных на G функций является непрерывной функцией во всех точках множества G, в которых знаменатель не обращается в нуль.

3. Частные производные. Пусть функция $f(x;\ y)$ определена в некоторой окрестности точки $(x_0;\ y_0)$. При фиксированном $y=y_0$ получим функцию $f(x;\ y_0)$, зависящую только от одной переменной x, а при $x=x_0$ получим функцию $f(x_0;\ y)$ только от y. Производная функции $f(x;\ y_0)$ при $x=x_0$ называется *частной производной по x* функции $f(x;\ y)$ в точке $(x_0;\ y_0)$ и обозначается

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0;\ y_0) \text{ или } f'_x(x_0;\ y_0),$$

а производная функции $f(x_0;\ y)$ при $y=y_0$ называется *частной производной по y* функции $f(x;\ y)$ в точке $(x_0;\ y_0)$ и обозначается

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0;\ y_0) \text{ или } f'_y(x_0;\ y_0).$$

Коротко определение частных производных можно сформулировать следующим образом: $f'_x(x;\ y)$ — это производная по x функции $f(x;\ y)$ при фиксированном y, а $f'_y(x;\ y)$ — это производная по y функции $f(x;\ y)$ при фиксированном x. Следовательно, частные производные функций находятся по обычным правилам дифференцирования: нужно лишь при дифференцировании по x

переменную y считать постоянной, а при дифференцировании по y считать постоянной x.

Например, если $f(x;\ y)=x^2y^3$, то

$$f'_x(x;\ y)=(x^2y^3)'_x=y^3\,(x^2)'_x=y^3\cdot 2x=2xy^3,$$
$$f'_y(x;\ y)=(x^2y^3)'_y=x^2\,(y^3)'_y=x^2\cdot 3y^2=3x^2y^2.$$

Аналогично, если $z=x^2y+x\sin xy$, то

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(x^2y+x\sin xy)=y\cdot 2x+\frac{\partial}{\partial x}(x\sin xy)=$$
$$=2xy+\sin xy+xy\cos xy,$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(x^2y+x\sin xy)=x^2+x^2\cos xy.$$

Частные производные $f'_x(x;\ y)$ и $f'_y(x;\ y)$ функции $f(x;\ y)$, если они существуют в каждой точке $(x;\ y)$ некоторой области, сами являются функциями двух переменных. Следовательно, для них также можно рассматривать частные производные.

Частные производные от частных производных $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ называются *частными производными второго порядка* функции $f(x;\ y)$. Очевидно, функция $f(x;\ y)$ двух переменных имеет четыре частных производных второго порядка:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right),\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Производные $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ и $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ называются *частными производными второго порядка по x и по y* соответственно и обозначаются $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. Частные производные $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ и $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ называются *смешанными производными второго порядка*. Можно доказать, что если смешанные производные непрерывны, то они равны. В случае равенства их обозначают $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$.

Пример 1. Найти частные производные первого и второго порядков функции

$$z=e^{xy}+y\sin x.$$

Решение. Сначала найдем частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=ye^{xy}+y\cos x,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=xe^{xy}+\sin x.$$

Затем найдем несмешанные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y^2 e^{xy} - y \sin x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2 e^{xy}.$$

Для смешанных производных имеем

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(ye^{xy}) + \cos x = e^{xy} + xye^{xy} + \cos x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = e^{xy} + xye^{xy} + \cos x.$$

Пример 2. Найти частные производные функции $z = f(x; y)$, удовлетворяющей уравнению

$$xz + y \operatorname{tg} z = xy + 1. \qquad (1)$$

Решение. Продифференцируем равенство (1) по x, считая переменную z функцией от x и y. В результате получим уравнение

$$z + x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{1}{\cos^2 z}\frac{\partial z}{\partial x} = y,$$

из которого находим

$$\frac{\partial z}{\partial x}\left(x + \frac{y}{\cos^2 z}\right) = y - z,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{(y - z)\cos^2 z}{x\cos^2 z + y}.$$

Аналогично находим частную производную по y:

$$x\frac{\partial z}{\partial y} + \operatorname{tg} z + y\frac{1}{\cos^2 z}\frac{\partial z}{\partial y} = x,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x\cos^2 z - \sin z \cos z}{y + x\cos^2 z}.$$

4. Пределы функций многих переменных. Пусть функция $f(x; y)$ определена в некоторой окрестности точки $(x_0; y_0)$, кроме, может быть, самой точки $(x_0; y_0)$. Число A называется *пределом функции* $f(x; y)$ *при* $x \to x_0$, $y \to y_0$, если для любой последовательности точек $(x_n; y_n)$ таких, что $x_n \to x_0$, $y_n \to y_0$ при $n \to \infty$ и $(x_n; y_n) \neq (x_0; y_0)$, последовательность $z_n = f(x_n; y_n)$, $n \in \boldsymbol{N}$, сходится к числу A. В этом случае пишут

$$A = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x; y)$$

или $f(x; y) \to A$ при $x \to x_0$, $y \to y_0$.

Очевидно, что если $f(x; y) \to A$ при $x \to x_0$, $y \to y_0$, то

$$f(x; y) = A + \alpha(x; y),$$

где $\alpha(x; y) \to 0$ при $x \to x_0$, $y \to y_0$.

Так как предел функции многих переменных сводится к пределу числовой последовательности, то для функций многих переменных справедливы теоремы о пределе суммы, разности, произведения и частного двух функций, аналогичные соответствующим теоремам для функций одной переменной.

Пример 1. Найти предел функции

$$f(x; y) = x \sin \frac{1}{x^2 + y^2}$$

при $x \to 0$, $y \to 0$.

Решение. Данная функция определена во всех точках $(x; y)$ плоскости, кроме точки $(0; 0)$, и $|f(x; y)| \leqslant |x|$.

Пусть $(x_n; y_n)$, $n \in N$,— некоторая последовательность точек плоскости такая, что $(x_n; y_n) \neq (0; 0)$ и $x_n \to 0$, $y_n \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда

$$|f(x_n; y_n)| \leqslant |x_n| \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Следовательно, $f(x; y) \to 0$ при $x \to 0$, $y \to 0$

Пример 2. Доказать, что функция

$$f(x; y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

не имеет предела при $x \to 0$, $y \to 0$.

Решение. Рассмотрим последовательности $x_n = \frac{1}{n}$ и $y_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $n \in N$. Очевидно, что $x_n \to 0$, $y_n \to 0$ при $n \to \infty$, однако $f(x_n; y_n) = \frac{(-1)^n}{2}$ не имеет предела при $n \to \infty$. Следовательно, данная функция не имеет предела при $x \to 0$, $y \to 0$.

Из определения предела функции в точке следует, что если $f(x; y) \to f(x_0; y_0)$ при $x \to x_0$, $y \to y_0$, то функция $f(x; y)$ непрерывна в точке $(x_0; y_0)$. И наоборот, если функция $f(x; y)$, определенная в некоторой окрестности точки $(x_0; y_0)$, непрерывна в точке $(x_0; y_0)$, то

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x; y) = f(x_0; y_0).$$

5. Дифференциалы функций многих переменных. Разность

$$\Delta f(x;\ y)=f(x+\Delta x;\ y+\Delta y)-f(x;\ y)$$

называется *полным приращением функции* $f(x;\ y)$, а разности

$$\Delta_x f(x;\ y)=f(x+\Delta x;\ y)-f(x;\ y),$$
$$\Delta_y f(x;\ y)=f(x;\ y+\Delta y)-f(x;\ y)$$

называются *частными приращениями функции* $f(x;\ y)$ по x и по y соответственно.

Полное приращение функции можно представить в виде суммы частных приращений. Действительно,

$$\Delta f(x;\ y)=f(x+\Delta x;\ y+\Delta y)-f(x;\ y+\Delta y)+$$
$$+f(x;\ y+\Delta y)-f(x;\ y)=\Delta_x f(x;\ y+\Delta y)+\Delta_y f(x;\ y).$$

Если функция $f(x;\ y)$ имеет частные производные $f'_x(x;\ y)$ и $f'_y(x;\ y)$, то, очевидно,

$$\Delta_x f(x;\ y)=f'_x(x;\ y)\,\Delta x+\alpha\,\Delta x,$$
$$\Delta_y f(x;\ y)=f'_y(x;\ y)\,\Delta y+\beta\,\Delta y,$$

где $\alpha\to 0$ и $\beta\to 0$ при $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$.

Произведения $f'_x(x;\ y)\,\Delta x$ и $f'_y(x;\ y)\,\Delta y$ называются *частными дифференциалами функции* $f(x;\ y)$ по x и по y соответственно.

Если функция $f(x;\ y)$ имеет непрерывные частные производные $f'_x(x;\ y)$ и $f'_y(x;\ y)$, то сумма частных дифференциалов

$$df(x;\ y)=f'_x(x;\ y)\,\Delta x+f'_y(x;\ y)\,\Delta y$$

называется *полным дифференциалом функции* $f(x;\ y)$ *в точке* $(x;\ y)$.

Приращения независимых переменных Δx и Δy обычно обозначают dx и dy. Тогда

$$df(x;\ y)=f'_x(x;\ y)\,dx+f'_y(x;\ y)\,dy. \qquad (1)$$

Можно показать, что

$$\Delta f(x;\ y)=df(x;\ y)+\alpha\,\Delta x+\beta\,\Delta y,$$

где $\alpha\to 0$, $\beta\to 0$ при $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$. Это утверждение можно сформулировать так: *полное приращение функции* $f(x;\ y)$ *в точке* $(x;\ y)$ *приближенно равно дифференциалу этой функции в этой же точке*, т. е.

$$\Delta f(x;\ y)\approx df(x;\ y)=f'_x(x;\ y)\,\Delta x+f'_y(x;\ y)\,\Delta y. \qquad (2)$$

Пример 1. Найти полный дифференциал функции $z = x \sin xy$.

Решение. Найдем сначала частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \sin xy + x \cos xy \cdot y = \sin xy + xy \cos xy,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 \cos xy.$$

Следовательно,

$$dz = (\sin xy + xy \cos xy)\, dx + (x^2 \cos xy)\, dy.$$

Это есть полный дифференциал данной функции в произвольной точке $(x; y)$. Чтобы найти дифференциал в конкретной точке, нужно вместо x и y подставить координаты этой точки. Например,

$$dz(0; 0) = 0 \cdot dx + 0 \cdot dy = 0,$$
$$dz(1; 0) = 0 \cdot dx + 1 \cdot dy = dy,$$
$$dz(0; 1) = 0 \cdot dx + 0 \cdot dy = 0,$$
$$dz(1; 1) = (\sin 1 + \cos 1)\, dx + \cos 1 \cdot dy.$$

Пример 2. При помощи дифференциала вычислить приближенное значение функции $f(x; y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ в точках (3,1; 3,9) и (2,9; 4,1).

Решение. Рассматриваемые точки лежат вблизи точки (3; 4), в которой легко вычисляется значение функции: $f(3; 4) = 5$. Найдем дифференциал данной функции в точке (3; 4):

$$f'_x(x; y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad f'_x(3; 4) = \frac{3}{5} = 0{,}6,$$

$$f'_y(x; y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad f'_y(3; 4) = \frac{4}{5} = 0{,}8.$$

Следовательно,

$$df(3; 4) = f'_x(3; 4)\, \Delta x + f'_y(3; 4)\, \Delta y = 0{,}6\Delta x + 0{,}8\Delta y.$$

Из формулы (2) следует, что

$$f(3 + \Delta x;\ 4 + \Delta y) \approx f(3; 4) + 0{,}6\, \Delta x + 0{,}8\, \Delta y.$$

Для точки (3,1; 3,9) имеем $\Delta x = 0{,}1$, $\Delta y = -0{,}1$, и поэтому

$$f(3{,}1; 3{,}9) \approx 5 + 0{,}6 \cdot 0{,}1 - 0{,}8 \cdot 0{,}1 = 4{,}98.$$

Для точки (2,9; 4,1) имеем $\Delta x = -0{,}1$, $\Delta y = 0{,}1$, и поэтому

$$f(2{,}9;\ 4{,}1) \approx 5 - 0{,}6 \cdot 0{,}1 + 0{,}8 \cdot 0{,}1 = 5{,}02.$$

Упражнения

5.1. Докажите, что функция $f(x; y) = \sin x \sin y$ непрерывна в любой точке $(x; y) \in R^2$.

5.2. Найдите область определения функции $z = \dfrac{\sqrt{1-xy}}{x^2-y^2}$ и докажите, что эта функция непрерывна в области определения.

5.3. Докажите, что функция $f(x; y)$, равная 0, если $xy = 0$, и 1, если $xy \neq 0$, не является непрерывной в точке (0; 0).

5.4. Найдите частные производные следующих функций двух переменных:

а) $z = x \sin y + y \sin x$;

б) $z = e^{xy} \operatorname{tg}(x+y)$;

в) $y = x^2 \sin(at+x)$;

г) $s = \sqrt{x^2+y^4}$.

5.5. Найдите частные производные следующих функций трех переменных:

а) $z = (x^2+y^2) \sin t$;

б) $u = xy + xz + yz + 1$;

в) $z = xye^{xyt} \cos yt$;

г) $V = x\sqrt{x^2+y^2} \operatorname{ctg} xt$.

5.6. Найдите частные производные второго порядка следующих функций:

а) $z = xy + x \sin y$;

б) $z = xy + x + y$;

в) $u = y \sin(x+at)$;

г) $u = xy + xz + yz + x^2 + y^2 + z^2$.

5.7. Найдите частные производные функций $z = f(x; y)$, удовлетворяющей уравнению $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

5.8. Найдите предел функции $f(x; y) = \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$ при $x \longrightarrow 0$, $y \longrightarrow 0$.

5.9. Найдите полные дифференциалы следующих функций:

а) $z = \cos xy$;

б) $z = x^2y + xy^2$;

в) $z = xe^y + y \operatorname{ctg} x$.

5.10. При помощи дифференциала вычислите приближенно значения функции $f(x; y) = e^x \sin(x+y)$ в точках (0,1; 0,2) и (0,2; 0,1).

§ 16. Кратные интегралы

1. Определение и свойства двойного интеграла (случай прямоугольника). Пусть функция $f(x; y)$ определена на прямоугольнике G: $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$ (рис. 35).

Отрезок $[a; b]$ оси Ox точками

$$x_i = a + \frac{b-a}{n} i, \quad i = 0, 1, \ldots, n,$$

разобьем на n отрезков $[x_{i-1}; x_i]$, $i = 1, \ldots, n$, длины $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$. Отрезок $[c; d]$ оси Oy точками

$$y_j = c + \frac{d-c}{n} j, \quad j = 0, 1, \ldots, n,$$

разобьем на n отрезков $[y_{j-1}; y_j]$, $j = 1, \ldots, n$, длины $\Delta y_j = \frac{d-c}{n}$. Тогда прямоугольник G разобьем на n^2 прямоугольников G_{ij}, площадь каждого из которых равна $\Delta x_i \Delta y_j$.

Составим двойную сумму

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f(\xi_i; \eta_j) \Delta x_i \Delta y_j, \tag{1}$$

где $(\xi_i; \eta_j)$ — некоторая точка прямоугольника G_{ij}. Эта сумма называется *интегральной суммой* функции $f(x; y)$.

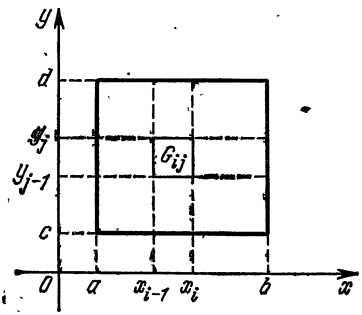


Рис. 35.

Если предел интегральной суммы (1) при $n \to \infty$ существует и не зависит от выбора точек $(\xi_i; \eta_j)$, то он называется *двойным интегралом* от функции $f(x; y)$ по G и обозначается

$$\iint_G f(x; y)\, dx\, dy.$$

Таким образом, согласно определению

$$\iint_G f(x; y)\, dx\, dy = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f(\xi_i; \eta_j) \Delta x_i \Delta y_j.$$

Очевидно, что

$$\iint\limits_G dx\,dy = \text{пл. } G,$$

т. е. интеграл от 1 по G равен площади G.

Из определения двойного интеграла и соответствующих свойств пределов последовательностей сразу получается следующее важное утверждение:

если интегралы от функций $f(x; y)$ и $g(x; y)$ по G существуют, то для любых чисел α и β интеграл по G от функции $\alpha f(x; y) + \beta g(x; y)$ существует и

$$\iint\limits_G (\alpha f(x; y) + \beta g(x; y))\,dx\,dy = \alpha \iint\limits_G f(x; y)\,dx\,dy + \beta \iint\limits_G g(x; y)\,dx\,dy. \qquad (2)$$

Отсюда, в частности, следует, что *постоянный множитель можно выносить за знак интеграла и что интеграл от суммы двух функций равен сумме интегралов от этих функций.*

Докажем формулу (2):

$$\iint\limits_G (\alpha f(x; y) + \beta g(x; y))\,dx\,dy =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (\alpha f(\xi_i; \eta_j) + \beta g(\xi_i; \eta_j))\,\Delta x_i\,\Delta y_j =$$

$$= \alpha \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f(\xi_i; \eta_j)\,\Delta x_i\,\Delta y_j +$$

$$+ \beta \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} g(\xi_i; \eta_j)\,\Delta x_i\,\Delta y_j =$$

$$= \alpha \iint\limits_G f(x; y)\,dx\,dy + \beta \iint\limits_G g(x; y)\,dx\,dy.$$

Здесь мы сначала воспользовались определением двойного интеграла, затем теоремой о пределе суммы двух последовательностей и теоремой о вынесении постоянного множителя за знак предела и, наконец, снова определением двойного интеграла.

2. Сведение двойного интеграла к повторному (случай прямоугольника). Пусть функция $f(x; y)$ определена и непрерывна на прямоугольнике G: $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$.

Покажем, что вычисление двойного интеграла от $f(x; y)$ по G сводится к вычислению двух однократных интегралов: интеграла по x от a до b и интеграла по y от c до d.

Отрезок $[a; b]$ оси Ox точками x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, разобьем на n равных по длине отрезков $[x_{i-1}; x_i]$. Тогда существуют такие $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$, что

$$\int_a^b f(x; y)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x; y)\,dx = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i; y)\,\Delta x_i \qquad (1)$$

для любого $y \in [c; d]$.

Далее, отрезок $[c; d]$ оси Oy точками y_j, $j = 0, 1, \ldots, n$, разобьем на n равных по длине отрезков $[y_{j-1}; y_j]$. Тогда существуют такие $\eta_j \in [y_{j-1}; y_j]$, что

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x; y)\,dx \right) dy =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \int_{y_{j-1}}^{y_j} \left(\int_a^b f(x; y)\,dx \right) dy = \sum_{j=1}^{n} \left(\int_a^b f(x; \eta_j)\,dx \right) \Delta y_j. \qquad (2)$$

Из формул (1) и (2) получаем формулу

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x; y)\,dx \right) dy = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f(\xi_i; \eta_j)\,\Delta x_i\,\Delta y_j. \qquad (3)$$

Так как в (3) левая часть есть число, а правая при $n \to \infty$ стремится к двойному интегралу от $f(x; y)$ по G, то окончательно получаем следующую формулу:

$$\iint_G f(x; y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x; y)\,dx \right) dy, \qquad (4)$$

которая называется *формулой сведения двойного интеграла к повторному*.

Повторный интеграл, стоящий в правой части формулы (4), обычно записывают иначе, а именно так, что формула (4) принимает вид

$$\iint_G f(x; y)\,dx\,dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x; y)\,dx. \qquad (4')$$

Аналогично этой формуле доказывается и другая формула сведения двойного интеграла к повторному:

$$\iint\limits_G f(x;\, y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x;\, y)\,dy. \qquad (5)$$

Пример 1. Вычислить двойной интеграл от функции $f(x;\, y) = x^2 + y\sin xy$ по квадрату G: $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$.

Решение. Воспользуемся формулой сведения двойного интеграла к повторному. Тогда

$$\iint\limits_G (x^2 + y\sin xy)\,dx\,dy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^1 (x^2 + y\sin xy)\,dx.$$

Сначала, считая y постоянным, вычислим интеграл по x:

$$\int\limits_0^1 (x^2 + y\sin xy)\,dx = \left(\frac{x^3}{3} - \cos xy\right)\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{3} - \cos y + 1 = \frac{4}{3} - \cos y.$$

Затем от полученной функции вычислим интеграл по y. Тогда

$$\iint\limits_G (x^2 + y\sin xy)\,dx\,dy = \int\limits_0^1 \left(\frac{4}{3} - \cos y\right) dy =$$

$$= \frac{4}{3} - \sin y\Big|_0^1 = \frac{4}{3} - \sin 1.$$

Пример 2. Вычислить двойной интеграл от функции $f(x;\, y) = y\cos x + xe^y$ по прямоугольнику G: $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $0 \leqslant y \leqslant 1$.

Решение.

$$\iint\limits_G f(x;\, y)\,dx\,dy = \int\limits_0^\pi dx \int\limits_0^1 (y\cos x + xe^y)\,dy =$$

$$= \int\limits_0^\pi \left(\frac{y^2}{2}\cos x + xe^y\right)\Big|_{y=0}^{y=1} dx =$$

$$= \int\limits_0^\pi \left(\frac{1}{2}\cos x + ex - x\right) dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^\pi \cos x\,dx + (e-1)\int\limits_0^\pi x\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 0 + (e-1)\frac{x^2}{2}\Big|_0^\pi = \frac{\pi^2}{2}(e-1).$$

3. **Определение двойного интеграла для произвольной области.** Пусть $f(x; y)$ определена на некоторой ограниченной области G точек $(x; y)$ координатной плоскости. Через G_0 обозначим наименьший прямоугольник, который содержит область G и стороны которого параллельны

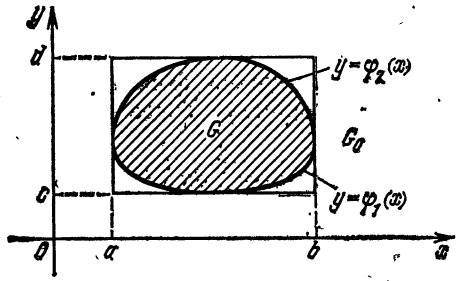


Рис. 36.

осям координат (рис. 36). Через $f_0(x; y)$ обозначим функцию, которая равна $f(x; y)$ на G и нулю вне G. Теперь по определению положим

$$\iint\limits_G f(x; y)\,dx\,dy = \iint\limits_{G_0} f_0(x; y)\,dx\,dy. \qquad (1)$$

Пусть область G ограничена слева и справа прямыми $x=a$ и $x=b$, а снизу и сверху графиками функций $y=\varphi_1(x)$ и $y=\varphi_2(x)$. Тогда из (1) получаем

$$\iint\limits_G f(x; y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f_0(x; y)\,dy \right) dx =$$

$$= \int\limits_a^b \left(\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x; y)\,dy \right) dx,$$

так как при фиксированном x функция $f_0(x; y)$ равна $f(x; y)$ на отрезке $[\varphi_1(x); \varphi_2(x)]$ и нулю вне этого отрезка.

Таким образом, для двойного интеграла по области G: $a \leqslant x \leqslant b$, $\varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)$ справедлива следующая формула:

$$\iint\limits_G f(x; y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x; y)\,dy. \qquad (2)$$

Аналогично, если область G ограничена снизу и сверху прямыми $y=c$ и $y=d$, а слева и справа графиками функций $x=\psi_1(y)$ и $x=\psi_2(y)$, то

$$\iint\limits_G f(x;\,y)\,dx\,dy=\int\limits_c^d dy\int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x;\,y)\,dx. \tag{3}$$

Формулы (2), (3), как и формулы (4), (5) п. 2, называются *формулами сведения двойного интеграла к повторному.*

Пример 1. Вычислить интеграл

$$\iint\limits_G (xy+y^2)\,dx\,dy,$$

где G — область, ограниченная $y=x$, $y=2x$ и $x=1$ (рис. 37).

Решение.

$$\iint\limits_G (xy+y^2)\,dx\,dy=\int\limits_0^1 dx\int\limits_x^{2x}(xy+y^2)\,dy=$$

$$=\int\limits_0^1\left(x\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}\right)\Big|_{y=x}^{y=2x}dx=\int\limits_0^1\left(2x^3-\frac{x^3}{2}+\frac{8}{3}x^3-\frac{x^3}{3}\right)dx=$$

$$=\int\limits_0^1\left(\frac{3}{2}+\frac{7}{3}\right)x^3\,dx=\frac{23}{6}\,\frac{x^4}{4}\Big|_0^1=\frac{23}{24}.$$

Пример 2. Вычислить двойной интеграл от функции $z=xy$ по кругу радиуса R с центром в начале координат.

Решение. Через K_R обозначим круг радиуса R с центром в точке $(0;\,0)$. Тогда

$$\iint\limits_{K_R} xy\,dx\,dy=\int\limits_{-R}^{R}dx\int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}xy\,dy=$$

$$=\int\limits_{-R}^{R}x\cdot 0\,dx=0.$$

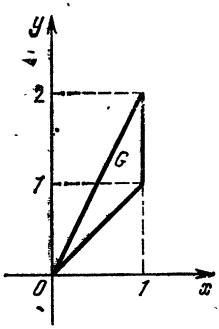


Рис. 37.

4. Тройные интегралы. Ограничимся рассмотрением лишь интегралов от функций $f(x;\,y;\,z)$, определенных на

прямоугольном параллелепипеде G: $a_1 \leqslant x \leqslant b_1$, $a_2 \leqslant y \leqslant b_2$, $a_3 \leqslant z \leqslant b_3$. Как и при определении двойного интеграла, каждый отрезок $[a_1; b_1]$, $[a_2; b_2]$, $[a_3; b_3]$ соответствующей, оси точками x_i, y_j и z_k разобьем на n равных по длине отрезков и составим интегральную сумму

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_i; \eta_j; \zeta_k) \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k,$$

где $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$, $\eta_j \in [y_{j-1}; y_j]$, $\zeta_k \in [z_{k-1}; z_k]$.

Если интегральная сумма имеет предел при $n \to \infty$ и этот предел не зависит от выбора ξ_i, η_j, ζ_k, то он называется *тройным интегралом* от функции $f(x; y; z)$ по G и обозначается

$$\iiint_G f(x; y; z)\, dx\, dy\, dz.$$

Для этого интеграла, как и для двойного интеграла, доказываются следующие формулы:

$$\iiint_G f(x; y; z)\, dx\, dy\, dz = \int_{a_1}^{b_1} dx \int_{a_2}^{b_2} dy \int_{a_3}^{b_3} f(x; y; z)\, dz,$$

$$\iiint_G f(x; y; z)\, dx\, dy\, dz = \int_{a_2}^{b_2} dy \int_{a_1}^{b_1} dx \int_{a_3}^{b_3} f(x; y; z)\, dz,$$

$$\iiint_G f(x; y; z)\, dx\, dy\, dz = \int_{a_3}^{b_3} dz \int_{a_2}^{b_2} dy \int_{a_1}^{b_1} f(x; y; z)\, dx$$

и т. д. Всего, очевидно, имеется шесть формул сведения тройного интеграла по G к повторному интегралу.

Пример. Вычислить интеграл от функции $f(x; y; z) = x + xy + xyz$ по кубу G: $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, $0 \leqslant z \leqslant 1$.

Решение.

$$\iiint_G f(x; y; z)\, dx\, dy\, dz =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 (x + xy + xyz)\, dz = \int_0^1 dx \int_0^1 \left(x + xy + \frac{xy}{2}\right) dy =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^1 \left(x + \frac{3}{2} xy\right) dy = \int_0^1 \left(x + \frac{3}{4} x\right) dx = \frac{7}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{8}.$$

Упражнения

5.11. Вычислите двойной интеграл по прямоугольнику G: $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$ от следующих функций:

а) $f(x; y) = x^2y + \cos y$; б) $f(x; y) = x \sin y + y \cos x$;

в) $f(x; y) = x^2 e^{x^3+y}$; г) $f(x; y) = x \sin \dfrac{1}{1+y^2}$.

5.12. Вычислите двойной интеграл

$$\iint\limits_G (x - 2y + xe^y)\, dx\, dy,$$

где G — множество точек $(x; y)$ таких, что $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant x^2$.

5.13. Вычислите двойной интеграл от функции $z = xy + x^2 + y^2$ по области G, ограниченной кривыми $y = x^2$ и $y = x^3$.

5.14. Вычислите двойной интеграл от функции $f(x; y) = 2x + 3xy$ по треугольнику с вершинами в точках $A(-1; 0)$, $B(0; 1)$, $C(1; 0)$.

5.15. Вычислите двойной интеграл от функции $z = x^2y$ по полукругу $x^2 + y^2 \leqslant 1$, $y \geqslant 0$.

5.16. Вычислите тройной интеграл по прямоугольному параллелепипеду G: $0 \leqslant x \leqslant 1$, $-1 \leqslant y \leqslant 1$, $0 \leqslant z \leqslant 1$ от следующих функций:

а) $u = xyz$; б) $u = xy + yz + xz$; в) $u = x^2z \cos y$.

§ 17. Приложения кратных интегралов

1. Масса плоской пластинки переменной плотности. Пусть требуется определить массу m некоторой прямоугольной пластинки G (рис. 38). Если пластинка однородная, то, как хорошо известно,

$$m = \rho ab, \qquad (1)$$

где ρ — поверхностная плотность, а a, b — размеры пластинки. Если же пластинка неоднородная, т. е. плотность ρ есть функция точки:

$$\rho = \rho(x; y), \quad (x; y) \in G,$$

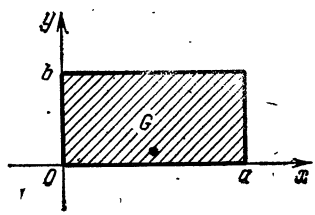


Рис. 38.

то для вычисления массы m поступим следующим образом. Прямыми, параллельными осям координат и заданными уравнениями

$$x = x_i = \frac{ia}{n}, \quad i = 0, 1, \ldots, n,$$

$$y = y_j = \frac{jb}{n}, \quad j = 0, 1, \ldots, n,$$

прямоугольник G разобьем на n^2 прямоугольников (рис. 39) и составим сумму

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\rho(\xi_i;\eta_j)\,\Delta x_i\,\Delta y_j, \qquad (2)$$

где $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$, $\eta_j \in [y_{j-1}; y_j]$. Эта сумма приближенно равна m и, очевидно, стремится к m при $n \to \infty$. Так

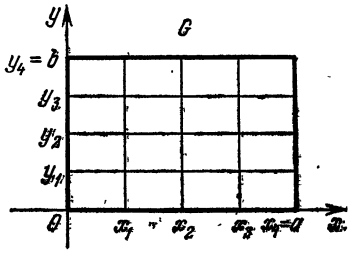


Рис. 39.

как, с другой стороны, предел суммы (2) при $n \to \infty$ равен интегралу от функции $\rho(x; y)$ по G, то; следовательно,

$$m = \iint_G \rho(x; y)\,dx\,dy. \qquad (3)$$

Таким образом, масса m пластинки G с переменной поверхностной плотностью $\rho(x; y)$ равна двойному интегралу от $\rho(x; y)$ по G.

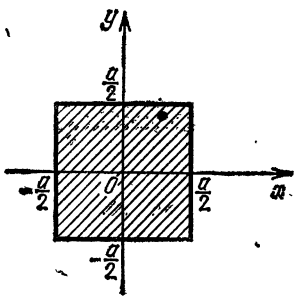


Рис. 40.

Заметим, что формула (3) справедлива для ограниченной пластинки произвольной формы.

Пример 1. Вычислить массу квадратной пластинки G со стороной длины a, поверхностная плотность которой в точке $P \in G$ равна $k(a^2 - r^2)$, где r — расстояние от точки P до центра квадрата, а k — некоторая постоянная.

Решение. Выберем систему координат, связанную с рассматриваемой пластинкой, так, как это указано на рис. 40.

Тогда

$$\rho = k(a^2 - x^2 - y^2)$$

и, следовательно,

$$m = \iint\limits_G k(a^2 - x^2 - y^2)\,dx\,dy = k\int\limits_{-a/2}^{a/2} dx \int\limits_{-a/2}^{a/2} (a^2 - x^2 - y^2)\,dy =$$

$$= ka^4 - ka\frac{x^3}{3}\Big|_{-a/2}^{a/2} - ka\frac{y^3}{3}\Big|_{-a/2}^{a/2} =$$

$$= ka^4 - \frac{ka}{3}\left(\frac{a}{2}\right)^3 \cdot 2 - \frac{ka}{3}\left(\frac{a}{2}\right)^3 \cdot 2 = ka^4 - \frac{ka^4}{6} = \frac{5}{6}ka^4.$$

Ответ. $m = \frac{5}{6}ka^4$.

Пример 2. Вычислить массу треугольной пластинки G: $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant x$ с поверхностной плотностью $\rho = 1 + xy$.

Решение. По формуле (3) получаем

$$m = \iint\limits_G (1 + xy)\,dx\,dy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x (1 + xy)\,dy =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^x (1 + xy)\,dy\right) dx = \int\limits_0^1 \left(x + x\frac{x^2}{2}\right) dx = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2 \cdot 4}\right)\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8}.$$

Ответ. $m = \frac{5}{8}$.

2. Объем тела. Пусть на прямоугольнике G: $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$ задана неотрицательная функция $z = f(x;\ y)$. Найдем формулу для объема V тела, координаты точек которого удовлетворяют условиям: $(x;\ y) \in G$, $0 \leqslant z \leqslant f(x;\ y)$ (рис. 41).

Для функции $f(x;\ y)$, $(x;\ y) \in G$, составим интегральную сумму

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f(\xi_i;\ \eta_j)\,\Delta x_i\,\Delta y_j.$$

Эта сумма приближенно равна объему V и, очевидно, стремится к V при $n \to \infty$. Следовательно,

$$V = \iint\limits_G f(x;\ y)\,dx\,dy.$$

Заметим, что эта формула справедлива и в том случае, когда G — произвольная область, ограниченная гладкими кривыми.

Пример. Найти объем V тела, ограниченного плоскостями $x=1$, $y=x$, $y=2x$, $z=0$ и поверхностью $z=x^2+y^2$.

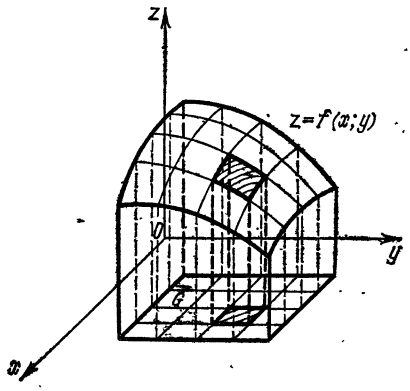


Рис. 41.

Решение. Область G, в которой определена функция $z=x^2+y^2$, изображена на рис. 37. Следовательно,

$$V=\iint\limits_G (x^2+y^2)\,dx\,dy=$$

$$=\int\limits_0^1 dx\int\limits_x^{2x}(x^2+y^2)\,dy=\int\limits_0^1 x^3\,dx+\int\limits_0^1\left(\frac{y^3}{3}\Big|_x^{2x}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\int\limits_0^1 7x^3\,dx=\frac{1}{4}+\frac{7}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\cdot\frac{10}{3}=\frac{5}{6}.$$

Ответ. $V=\frac{5}{6}$.

3. Масса тела переменной плотности. Как для массы плоской пластинки с переменной поверхностной плотностью $\rho=\rho(x;\ y)$, так и для массы m тела G с переменной плотностью $\rho=\rho(x;\ y;\ z)$, $(x;\ y;\ z)\in G$, можно получить следующую формулу:

$$m=\iiint\limits_G \rho(x;\ y;\ z)\,dx\,dy\,dz, \qquad (1)$$

т. е. масса тела G с переменной плотностью $\rho(x;\ y;\ z)$ равна тройному интегралу по G от этой плотности.

Пример. Вычислить массу куба G: $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, $0 \leqslant z \leqslant 1$ с переменной плотностью $\rho = x + y + z + 1$.

Решение. По формуле (1) получаем

$$m = \iiint_G (x + y + z + 1)\, dx\, dy\, dz =$$

$$= \int_0^1 x\, dx + \int_0^1 y\, dy + \int_0^1 z\, dz + 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 = \frac{5}{2}.$$

Ответ. $m = 2{,}5$.

Упражнения

5.17. Найдите массу прямоугольного треугольника с катетами 2 см и 3 см, если его плотность в точке P равна $(1 + r)$ г/см^2, где r — расстояние от точки P до катета длины 2 см.

5.18. Найдите объем тела, ограниченного поверхностями $z = 0$, $z = xy$, $x = 0$, $y = 0$, $x = 1$, $y = 1$.

5.19. Найдите массу прямого кругового цилиндра радиуса R и высоты h, если его плотность в точке P равна $\max\{r_1; r_2\}$, где r_1, r_2 — расстояния от точки P до оснований.

Глава VI

КОМБИНАТОРИКА И ФОРМУЛА НЬЮТОНА ДЛЯ СТЕПЕНИ БИНОМА

§ 18. Размещения, перестановки, сочетания

1. Примеры простейших комбинаторных задач. *Комбинаторными задачами* принято называть задачи, в которых необходимо подсчитать, сколькими способами можно осуществить то или иное требование, выполнить какое-либо условие, сделать тот или иной выбор.

Рассмотрим несколько типичных для комбинаторики задач.

Пример 1. В группе 20 учащихся. Сколькими способами могут быть выбраны комсорг и профорг при условии, что каждый учащийся может быть избран только на одну из этих должностей?

Решение. Пусть сначала избирается комсорг. Поскольку каждый член группы может быть избран комсоргом, то, очевидно, есть 20 способов его выбора. Тогда профоргом может стать каждый из оставшихся 19 человек. Любой из 20 способов выбора комсорга может осуществиться вместе с любым из 19 способов выбора профорга. Поэтому всего существует $20 \cdot 19 = 380$ способов выбора комсорга и профорга.

Пример 2. На собрании пожелали выступить 4 человека. Сколькими способами можно расположить их в списке ораторов?

Решение. Первого оратора можно выделить четырьмя способами; второго, очевидно, тремя способами. На третье место в очереди ораторов будут претендовать теперь уже только два человека, и, следовательно, есть два способа заполнить третье место в списке ораторов. Для четвертого оратора выбора уже не остается: он выступит последним. Поскольку каждый способ выбора первого оратора может быть скомбинирован с каждым способом выбора второго оратора и с любым из двух возможных

способов выбора третьего оратора, то число способов составления списка выступающих равно

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24.$$

Пример 3 Группу учащихся техникума должна экзаменовать по математике комиссия из двух преподавателей. Сколькими способами может быть составлена такая комиссия, если в техникуме пять преподавателей математики?

Решение. Обозначив преподавателей буквами A, B, C, D, E, можно выписать все возможные экзаменационные комиссии, а именно:

$$AB,\ AC,\ AD,\ AE,\ BC,$$
$$BD,\ BE,\ CD,\ CE,\ DE,$$

и увидеть, что их число равно десяти.

Замечание. Конечно, такое решение примера 3 должно вызывать чувство неудовлетворения. Ведь если бы преподавателей было не пять человек, а например, четырнадцать и составить комиссию требовалось бы не из двух человек, а, допустим, из семи, то попытка получить результат тем же способом окончилась бы полным провалом, так как в этом случае можно образовать (как это будет показано ниже) более трех тысяч различных экзаменационных комиссий.

Прежде чем переходить к введению новых понятий и к выводу общих формул, позволяющих решать любые подобные задачи, зададимся вопросом: что общего в примерах 1—3 и есть ли какие-либо существенные различия между ними? Прежде всего бросается в глаза, что во всех трех примерах речь идет о некотором конечном множестве элементов и о количестве его подмножеств, удовлетворяющих некоторым заданным требованиям. Так, в примере 1 рассматривалось множество всех учащихся группы, т. е. множество, состоящее из 20 элементов, и требовалось найти число всех различных подмножеств этого множества, состоящих из двух элементов (двух учащихся, избранных комсоргом и профоргом). В примере 2 речь шла о четырехэлементном множестве всех ораторов и определялось число четырехэлементных подмножеств этого множества, отличающихся друг от друга порядком следования элементов. В примере 3 из пятиэлементного множества всех преподавателей математики выделялись различные двухэлементные подмножества (комиссии) и подсчитывалось их число.

Наряду с отмеченным сходством, при внимательном рассмотрении примеров 1—3 выявляется одно очень важное различие, существующее между ними. Оно заключается в том, что в примерах 1, 2 и в примере 3 совершенно по-разному понимаются слова «различные подмножества». В примере 3 различными считались подмножества, отличающиеся друг от друга по крайней мере одним элементом. Порядок элементов не принимался во внимание. Комиссия, состоящая из преподавателей Иванова и Петрова, ничем, естественно, не отличалась от комиссии, состоящей из Петрова и Иванова. В примере 1, напротив, подмножества, отличающиеся друг от друга только порядком элементов, считались различными. Выбор Иванова комсоргом, Петрова профоргом и выбор Петрова комсоргом, а Иванова профоргом — это два различных способа выбора. В примере 2, вообще, рассматривались только такие четырехэлементные подмножества всех ораторов, которые отличались друг от друга исключительно порядком следования элементов.

В комбинаторных задачах всегда необходимо подсчитать число всех подмножеств данного множества, удовлетворяющих определенным условиям, но в одних задачах подмножества, отличающиеся только установленным в них порядком следования элементов, приходится считать различными, в других порядок следования элементов не важен и подмножества, отличающиеся только расположением элементов, не считаются различными. Это обстоятельство крайне важно постоянно иметь в виду при изучении комбинаторики и теории вероятностей.

2. Размещения и перестановки.

Определение 1. Пусть имеется множество, содержащее n элементов. Каждое его упорядоченное подмножество, состоящее из k элементов, называется *размещением из n элементов по k элементов.*

Из определения вытекает, что $n \geqslant k \geqslant 0$ и что размещения из n элементов по k элементов — это все k-элементные подмножества, отличающиеся составом элементов или порядком их следования. Отметим, что частный случай $k=0$, т. е. размещение из n элементов по 0 элементов, дает подмножества n-элементного множества, не содержащие элементов, т. е. только пустое множество.

В комбинаторных задачах необходимо уметь подсчитывать число всех размещений из n элементов по k элементов. Для обозначения этого числа применяется спе-

циальный символ A_n^k (читается: «число размещений из n по k» или «a из n по k») *). Теперь видно, что в примере 1 предыдущего пункта требовалось найти число размещений из 20 элементов по 2 элемента, и из решения этого примера следует, что $A_{20}^2 = 20 \cdot 19 = 380$. Далее, очевидно, что $A_n^0 = 1$, так как существует только одно подмножество n-элементного множества, не содержащее элементов (пустое множество).

В общем случае на вопрос о числе размещений из n элементов по k элементов дает ответ следующая теорема.

Теорема 1. *Число размещений из n элементов по k элементов равно произведению k последовательных натуральных чисел от n до $n-k+1$ включительно, т. е.*

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1), \quad k > 0. \qquad (1)$$

Доказательство. Число размещений из n элементов по k элементов равно числу всех k-элементных упорядоченных подмножеств множества, содержащего n элементов. Первый элемент подмножества можно, очевидно, выбрать n способами, второй элемент подмножества можно выбрать уже только $n-1$ способом, так как в качестве второго элемента можно взять любой элемент множества, кроме уже выбранного первым. Каждый из способов выбора первого элемента может объединяться с каждым из способов выбора второго, и, следовательно, существует $n(n-1)$ способов выбора первых двух элементов при построении k-элементного упорядоченного подмножества. После выбора первых двух элементов остаются $n-2$ возможности для выбора третьего элемента, и опять-таки каждая из этих возможностей может комбинироваться с любой из возможностей выбора первых двух элементов, т. е. выбор первых трех элементов может быть осуществлен $n(n-1)(n-2)$ способами. Последний, k-й элемент k-элементного подмножества может быть выбран $n-k+1$ способами, так как к моменту выбора k-го элемента $k-1$ элементов уже выбраны и осталось, следовательно, $n-(k-1)$ элементов. Таким образом, формула (1) доказана. Доказательство является обобщением рассуждения, использованного при решении примера 1 п. 1.

Формулу (1) удобно записывать в другом виде. Будем для краткости произведение $n(n-1)(n-2)\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1$, т. е.

*) A — первая буква французского слова «arrangement», что означает «размещение», «приведение в порядок».

произведение всех натуральных чисел от n до 1, обозначать символом $n!$ (читается: «эн факториал»). Используя знак факториала, можно, например, записать

$$1! = 1,$$
$$2! = 2 \cdot 1 = 2,$$
$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6,$$
$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24,$$
$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120.$$

Умножим и разделим произведение, стоящее в правой части формулы (1), на $(n-k)!$. Тогда получим

$$A_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)(n-k)!}{(n-k)!}$$

или

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}. \qquad (2)$$

Формула (1) была получена в предположении, что $k > 0$, формулой (2) можно пользоваться и при $k = 0$, так как она и в этом частном случае дает правильный результат, а именно:

$$A_n^0 = \frac{n!}{(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1.$$

При выводе формулы (1) предполагалось также, что $n \neq 0$, т. е. что данное множество имеет хотя бы один элемент. Если $n = 0$, то это означает, что рассматривается пустое множество, а так как пустое множество имеет только одно подмножество (само себя), то $A_0^0 = 1$. Если условиться, что $0! = 1$, то формула (2) будет давать верный результат и в случае $n = 0$. В самом деле,

$$A_0^0 = \frac{0!}{0!} = 1.$$

Пример 1. Группа учащихся изучает 7 учебных дисциплин. Сколькими способами можно составить расписание занятий на понедельник, если в этот день недели должно быть 4 различных урока?

Решение. Число способов равно числу размещений из 7 элементов по 4, т. е. равно A_7^4. По формуле (1), полагая в ней $n = 7$, $k = 4$, получаем $A_7^4 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$.

Определение 2. Размещения из n элементов по n элементов называются *перестановками из n элементов*.

Из определения следует, что перестановки являются частным случаем размещений. Так как каждая перестановка содержит все n элементов множества, то различные перестановки отличаются друг от друга только порядком элементов. Число перестановок из n элементов (его обозначают P_n*)) равно числу всех упорядоченных n-элементных подмножеств множества, содержащего n элементов. В примере 2 п. 1 требовалось найти число всех перестановок из 4 элементов (число всех возможных перестановок ораторов). Это число оказалось равным 24, следовательно, $P_4 = 24$.

В общем случае число перестановок из n элементов $P_n = A_n^n$ и, следовательно, его можно найти по формуле (1) или по формуле (2), положив в каждой из них $k = n$.

Действительно, формула (2) дает

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!.$$

Из формулы (1) находим

$$P_n = A_n^n = n(n-1)(n-2)\ldots(n-n+1) = n!.$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Число перестановок из n элементов равно $n!$.*

Пример 2. Сколько шестизначных чисел, кратных пяти, можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 при условии, что в числе цифры не повторяются?

Решение. Цифра 5 обязана стоять на последнем месте. Остальные пять цифр могут стоять на оставшихся пяти местах в любом порядке. Следовательно, искомое число шестизначных чисел, кратных пяти, равно числу перестановок из пяти элементов, т. е. $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$.

3. Сочетания.

Определение. Пусть имеется множество, состоящее из n элементов. Каждое его подмножество, содержащее k элементов, называется *сочетанием из n элементов по k элементов.*

Таким образом, сочетания из n элементов по k элементов — это все k-элементные подмножества n-элементного множества, причем различными подмножествами считаются только те, которые имеют неодинаковый состав элементов.

*) P — первая буква французского слова «permutation» — перестановка.

Подмножества, отличающиеся друг от друга только порядком следования элементов, не считаются различными.

Число всех сочетаний из n элементов по k элементов обозначается символом C_n^k (читается: «число сочетаний из n по k» или «це из n по k») *). В примере 3 п. 1 было найдено число сочетаний из 5 элементов по 2 элемента, причем оказалось, что $C_5^2 = 10$.

В общем случае число сочетаний из n элементов по k элементов определяется следующей формулой:

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}. \qquad (1)$$

Для доказательства найдем зависимость между C_n^k и A_n^k. Число A_n^k, т. е. число всех упорядоченных k-элементных подмножеств, можно найти таким образом. Сначала образовать все возможные неупорядоченные подмножества, содержащие k элементов. Их число равно C_n^k, а затем из каждого полученного подмножества, перестановкой его элементов, получить все упорядоченные подмножества, которых будет, очевидно, в $k!$ раз больше, так как каждое k-элементное множество можно упорядочить $k!$ способами. Другими словами, упорядоченных k-элементных подмножеств в $k!$ раз больше, чем неупорядоченных, т. е. $A_n^k = k!C_n^k$, откуда $C_n^k = \frac{A_n^k}{k!}$, и так как $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$, то $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$. Теперь можно подсчитать число всех экзаменационных комиссий, состоящих из 7 человек, при общем числе экзаменаторов, равном 14 (см. замечание после примера 3 п. 1):

$$C_{14}^7 = \frac{14!}{7!\,7!} = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 3432.$$

Формулу (1) можно записать в другом, более удобном для вычислений виде. Сократив числитель и знаменатель дроби на $(n-k)!$, получим

$$C_n^k = \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}. \qquad (2)$$

Этот результат можно сформулировать в следующем виде.

*) C — первая буква французского слова «combinasion» — сочетание. Заметим еще, что вместо C_n^k иногда пишут $\binom{n}{k}$.

Теорема. *Число сочетаний из n элементов по k элементов равно произведению всех натуральных чисел от n до $n-k+1$ включительно, деленному на k!.*

Пример. Сколько матчей будет сыграно в футбольном чемпионате с участием 16 команд, если каждые две команды встречаются между собой один раз?

Решение. Матчей состоится столько, сколько существует двухэлементных подмножеств у множества, состоящего из 16 элементов, т. е. их число равно C_{16}^2. По формуле (2) находим

$$C_{16}^2 = \frac{16 \cdot 15}{2} = 120,$$

т. е. всего будет сыграно 120 матчей.

Числа C_n^k обладают некоторыми интересными и важными свойствами. Отметим два таких свойства. Первое свойство описывается равенством

$$C_n^k = C_n^{n-k}, \qquad (3)$$

которое легко доказывается с помощью формулы (1):

$$C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-(n-k))!\,(n-k)!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = C_n^k.$$

Пользуясь этим свойством, можно упрощать вычисление чисел C_n^k в тех случаях, когда $k > \frac{n}{2}$, например:

$$C_{15}^{12} = C_{15}^3 = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{3 \cdot 2} = 455.$$

Второе свойство

$$C_{n+1}^{k+1} = C_n^{k+1} + C_n^k \quad (k < n) \qquad (4)$$

также проще всего доказать, применяя формулу (1):

$$C_n^{k+1} + C_n^k = \frac{n!}{(n-k-1)!\,(k+1)!} + \frac{n!}{(n-k)!\,k!} =$$

$$= \frac{n!}{(k+1)!\,(n-k)!}\left(\frac{(n-k)!}{(n-k-1)!} + \frac{(k+1)!}{k!}\right) =$$

$$= \frac{n!}{(k+1)!\,(n+1-(k+1))!}\left(\frac{n-k}{1} + \frac{k+1}{1}\right) =$$

$$= \frac{(n+1)!}{(n+1-(k+1))!\,(k+1)!} = C_{n+1}^{k+1}.$$

Формула (4) позволяет последовательно находить числа C_n^k. В самом деле, положив $n=1$, $k=1$, получим $C_2^1=C_1^1+C_1^0=2$; затем, положив $n=2$, а $k=0$ или $k=1$, будем иметь

$$C_3^1=C_2^1+C_2^0=2+1=3,$$
$$C_3^2=C_2^2+C_2^1=1+2=3.$$

Далее, если $n=3$, то при $k=0$, 1, 2 соответственно получаем

$$C_4^1=C_3^1+C_3^0=3+1=4,$$
$$C_4^2=C_3^2+C_3^1=3+3=6,$$
$$C_4^3=C_3^3+C_3^2=1+3=4.$$

Числа C_n^k расположим в виде следующей треугольной таблицы:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & C_0^0 & & & \\ & & C_1^0 & & C_1^1 & & \\ & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 & \\ C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 \end{array}$$

В начале и в конце каждой строки стоят единицы, так как $C_n^0=C_n^n=1$, а остальные места могут быть легко заполнены с помощью формулы (4), которая показывает, что на любом месте (кроме крайних) в любой строке стоит число, равное сумме двух чисел, стоящих над ним в предыдущей строке. Описанная таблица называется *треугольником Паскаля*. Первые семь строк треугольника Паскаля выглядят следующим образом:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} & & & & & & 1 & & & & & & \\ & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\ & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\ & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\ & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & 1 \\ 1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & 1 \end{array}$$

При желании таблицу можно продолжить дальше, заполняя следующие строки по закону, который определяется формулой (4).

Упражнения

6.1. Вычислите

а) $\frac{P_6 - P_5}{5!}$; б) $\frac{20!}{5!\,16!}$; в) $\frac{A_{20}^6 + A_{20}^5}{A_{20}^4}$;

г) $\frac{P_{k+1}}{A_{k-1}^{n-1} P_{k-n}}$ $(k \geqslant n)$; д) $\frac{A_n^k (n-k)!}{(n-1)!}$ $(k \leqslant n)$.

6.2. Найдите n, если

а) $A_n^5 = 18 A_{n-2}^4$; б) $A_n^4 P_{n-3} = 42 P_{n-2}$;

в) $P_{n+2} = 132 A_n^k P_{n-k}$; г) $(n+5)! = 240\,(n-k)!\,A_{n+3}^{k+3}$.

6.3. Найдите область определения функции

$$f(x) = A_7^{x-3}$$

и множество ее значений.

6.4. Сколько различных двузначных чисел можно образовать из цифр 1, 2, 3, 4 при условии, что в каждом числе нет одинаковых цифр?

6.5. Сколько различных двузначных чисел можно образовать из цифр 1, 2, 3, 4?

6.6. Из цифр 0, 1, 2, 3 составлены все возможные четырехзначные числа так, что в каждом числе нет одинаковых цифр. Сколько получилось чисел? Сколько среди них четных чисел?

6.7. Сколько различных перестановок можно образовать из букв следующих слов: а) зебра; б) баран; в) водород; г) абракадабра?

6.8. Сколькими способами можно составить расписание занятий на понедельник, если в этот день должно быть пять уроков: алгебра, геометрия, история, география и литература, причем алгебра и геометрия не должны следовать непосредственно друг за другом?

6.9. Сколькими способами можно расположить в ряд 5 белых и 4 черных шара так, чтобы черные шары не лежали рядом? Шары одного цвета не отличимы друг от друга.

6.10. Укротителю диких зверей предстоит вывести на арену цирка одного за другим пять львов и четыре тигра. Сколькими способами он может это сделать, причем так, чтобы никакие два тигра не шли непосредственно друг за другом?

6.11. Вычислите

$$\frac{P_6 (C_7^5 + C_7^2)}{A_{10}^7}.$$

6.12. Найдите n, если

а) $12 C_{n+3}^{n-1} = 55 A_{n+1}^2$; б) $12 C_n^1 + C_{n+1}^2 = 126$;

в) $C_{n+4}^{n+1} - C_{n+3}^n = 15\,(n+2)$; г) $\frac{1}{C_n^n} = \frac{1}{C_5^n} + \frac{1}{C_6^n}$.

6.13. Найдите область определения функции

$$f(x) = C_{x+1}^{2x-8}$$

и множество ее значений.

6.14. Решите неравенства:

а) $C_{10}^{x-1} > 2C_{10}^{x}$; б) $8C_{105}^{x} < 3C_{105}^{x+1}$.

6.15. На пять сотрудников выделены три путевки. Сколькими способами их можно распределить, если

а) все путевки различны;

б) все путевки одинаковы?

6.16. В группе 30 студентов. Сколькими способами можно выделить двух человек для дежурства, если

а) один из них должен быть старшим;

б) старшего быть не должно?

6.17. В почтовом ящике 38 отделений. Сколькими способами можно положить в ящик 35 одинаковых открыток так, чтобы в каждом отделении было не более одной открытки?

6.18. В розыгрыше первенства по футболу было сыграно 153 матча. Каждые две команды встречались между собой один раз. Сколько команд участвовало в розыгрыше первенства?

6.19. В шахматном турнире, где участники встречаются между собой один раз, два шахматиста выбыли по болезни, успев сыграть только по три партии каждый. Сколько шахматистов начали турнир, если всего было сыграно 84 партии?

6.20. Сколько диагоналей имеет выпуклый десятиугольник?

6.21. Никакие три диагонали выпуклого десятиугольника не пересекаются в одной точке. Определите число точек пересечений диагоналей.

6.22. Во взводе 3 сержанта и 30 солдат. Сколькими способами можно выделить одного сержанта и трех солдат для патрулирования?

6.23. Буквы азбуки Морзе представляют собой набор «точек» и «тире». Сколько букв может быть в азбуке Морзе, если

а) буква не должна содержать более четырех знаков;

б) буква не должна содержать более пяти знаков?

6.24. Хоккейная команда состоит из 2 вратарей, 7 защитников и 10 нападающих. Сколькими способами тренер может образовать стартовую шестерку, состоящую из вратаря, двух защитников и трех нападающих?

6.25. Сколько существует шестизначных чисел, все цифры которых нечетны (1, 3, 5, 7, 9)?

6.26. Сейф запирается на замок, состоящий из пяти дисков, на каждом из которых изображены цифры 0, 1, 2, ..., 9. Замок открывается, если на дисках набрана одна определенная комбинация цифр. Хватит ли 10 дней на открытие сейфа, если «рабочий день» продолжается 13 часов, а на набор одной комбинации цифр уходит 5 секунд?

6.27. Автомобильные номера состоят из трех букв (всего используется 30 букв) и четырех цифр (используются все 10 цифр). Сколько автомобилей можно занумеровать таким образом, считая, что никакие два автомобиля не имеют одинакового номера?

§ 19. Формула Ньютона

Числа, стоящие в третьей и в четвертой строках треугольника Паскаля, появляются при возведении двучлена (бинома) $a+b$ в квадрат и в куб. В самом деле, хорошо

известные формулы

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

можно записать и так:

$$(a+b)^2 = C_2^0a^2 + C_2^1ab + C_2^2b^2,$$
$$(a+b)^3 = C_3^0a^3 + C_3^1a^2b + C_3^2ab^2 + C_3^3b^3.$$

Возникает естественная гипотеза: не будут ли справедливы аналогичные формулы для четвертой, пятой и вообще любой натуральной степени бинома?

Выясним сначала, будет ли справедлива аналогичная формула для четвертой степени. Для этого обе части формулы для $(a+b)^3$ умножим на $a+b$. Тогда получим

$$\begin{aligned}(a+b)^4 &= (C_3^0a^3 + C_3^1a^2b + C_3^2ab^2 + C_3^3b^3)(a+b) = \\ &= C_3^0a^4 + C_3^1a^3b + C_3^2a^2b^2 + C_3^3ab^3 + \\ &\quad + C_3^0a^3b + C_3^1a^2b^2 + C_3^2ab^3 + C_3^3b^4 = \\ &= C_3^0a^4 + (C_3^1 + C_3^0)a^3b + (C_3^2 + C_3^1)a^2b^2 + (C_3^3 + C_3^2)ab^3 + C_3^3b^4.\end{aligned}$$

Учитывая, что

$$C_3^0 = C_4^0, \quad C_3^1 + C_3^0 = C_4^1, \quad C_3^2 + C_3^1 = C_4^2,$$
$$C_3^3 + C_3^2 = C_4^3, \quad C_3^3 = C_4^4,$$

убеждаемся в справедливости формулы

$$(a+b)^4 = C_4^0a^4 + C_4^1a^3b + C_4^2a^2b^2 + C_4^3ab^3 + C_4^4b^4.$$

Таким образом, нам удалось, используя формулу для третьей степени бинома, получить аналогичную формулу для четвертой степени. Проведенное рассуждение, во-первых, подтверждает гипотезу и, во-вторых, наталкивает на мысль воспользоваться для ее доказательства методом математической индукции.

Теорема. *Для произвольных чисел a и b и произвольного натурального числа n справедлива формула*

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= \\ &= C_n^0a^n + C_n^1a^{n-1}b + \ldots + C_n^ka^{n-k}b^k + \ldots + C_n^nb^n. \quad (1)\end{aligned}$$

Используя знак суммы, формулу (1) можно записать короче:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^ka^{n-k}b^k. \quad (2)$$

Доказательство. Для $n=1$ формула (1) имеет вид

$$(a+b)^1 = C_1^0 a + C_1^1 b,$$

и, так как $C_1^0 = C_1^1 = 1$, она, очевидно, верна.

Предположим, что формула справедлива для $n=m$, т. е.

$$(a+b)^m = \sum_{k=0}^{m} C_m^k a^{m-k} b^k.$$

Тогда

$$(a+b)^{m+1} = (a+b) \sum_{k=0}^{m} C_m^k a^{m-k} b^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} C_m^k a^{m+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{m} C_m^k a^{m-k} b^{k+1} =$$

$$= C_m^0 a^{m+1} + \sum_{k=1}^{m} C_m^k a^{m+1-k} b^k + \sum_{k=1}^{m} C_m^{k-1} a^{m+1-k} b^k + C_m^m b^{m+1} =$$

$$= C_m^0 a^{m+1} + \sum_{k=1}^{m} (C_m^k + C_m^{k-1}) a^{m+1-k} b^k + C_m^m b^{m+1}.$$

Учитывая, что

$$C_m^0 = C_{m+1}^0, \quad C_m^k + C_m^{k-1} = C_{m+1}^k, \quad C_m^m = C_{m+1}^{m+1},$$

получаем

$$(a+b)^{m+1} = \sum_{k=0}^{m+1} C_{m+1}^k a^{m+1-k} b^k.$$

Таким образом, из справедливости формулы (1) для $n=m$ следует ее справедливость для $n=m+1$, и так как формула верна и при $n=1$, то на основании принципа математической индукции ее справедливость установлена для всех натуральных значений n.

Формула (1) носит имя великого английского физика и математика И. Ньютона. Правая часть ее называется *разложением натуральной степени бинома*. Коэффициенты C_n^k называются *биномиальными коэффициентами*.

Отметим некоторые характерные особенности формулы Ньютона.

а) Правая часть формулы Ньютона содержит $n+1$ слагаемое.

б) Каждое слагаемое имеет вид $C_n^k a^{n-k} b^k$.

Слагаемое $C_n^k a^{n-k}b^k$, стоящее на $(k+1)$-м месте, удобно считать k-м членом разложения и обозначать через T_k. При этом условии $T_0 = C_n^0 a^n$ — нулевой член разложения, $T_1 = C_n^1 a^{n-1}b$ — первый член разложения, $T_n = C_n^n b^n$ — n-й член разложения.

в) Показатели степени при a в каждом следующем члене разложения на единицу меньше, чем в предыдущем, показатели степени при b — на единицу больше. Сумма показателей степени при a и b в каждом члене разложения равна n.

г) Биномиальные коэффициенты разложения суть числа, стоящие в $(n+1)$-й строке треугольника Паскаля. Коэффициенты разложения, одинаково удаленные от нулевого и от n-го члена разложения, равны, так как $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Формулу Ньютона можно записать еще и в таком виде:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} a^{n-k}b^k \qquad (3)$$

или, не используя знака суммы,

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \dots$$
$$\dots + \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}a^{n-k}b^k + \dots + b^n. \qquad (3')$$

Здесь биномиальные коэффициенты C_n^k заменены их выражениями согласно формуле для числа сочетаний.

Пример 1. Возвести в седьмую степень двучлен $x+1$.

Положив в формуле (2) $a = x$, $b = 1$, $n = 7$, получим

$$(x+1)^7 = \sum_{k=0}^{7} C_7^k x^{7-k} =$$
$$= C_7^0 x^7 + C_7^1 x^6 + C_7^2 x^5 + C_7^3 x^4 + C_7^4 x^3 + C_7^5 x^2 + C_7^6 x + C_7^7 =$$
$$= x^7 + 7x^6 + \frac{7\cdot 6}{2}x^5 + \frac{7\cdot 6\cdot 5}{2\cdot 3}x^4 + \frac{7\cdot 6\cdot 5}{2\cdot 3}x^3 + \frac{7\cdot 6}{2}x^2 + 7x + 1 =$$
$$= x^7 + 7x^6 + 21x^5 + 35x^4 + 35x^3 + 21x^2 + 7x + 1.$$

Пример 2. Возвести в пятую степень двучлен $x-y$.

Воспользуемся формулой (3), положив в ней $a=x$, $b=-y$, $n=5$. Тогда

$$(x-y)^5=\sum_{k=0}^{5}\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}x^{5-k}(-y)^k=$$

$$=x^5+5x^4(-y)+\frac{5\cdot4}{2}x^3(-y)^2+$$

$$+\frac{5\cdot4}{2}x^2(-y)^3+5x(-y)^4+(-y)^5=$$

$$=x^5-5x^4y+10x^3y^2-10x^2y^3+5xy^4-y^5.$$

Пример 3. Вычислить $(1+i)^6$.

Положив в формуле (3') $a=1$, $b=i$, $n=6$, получим

$$(1+i)^6=1+6i+\frac{6\cdot5}{2}i^2+\frac{6\cdot5\cdot4}{2\,3}i^3+\frac{6\cdot5}{2}i^4+6i^5+i^6=$$

$$=1+6i-15-20i+15+6i-1=-8i.$$

Пример 4. Найти девятый член разложения для степени бинома $\left(\frac{1}{x}+x\right)^{12}$.

Имеем

$$T_9=C_{12}^9\left(\frac{1}{x}\right)^3x^9=C_{12}^3x^6=\frac{12\cdot11\cdot10}{2\cdot3}x^6=220x^6.$$

Пример 5. Найти номер члена разложения степени бинома

$$\left(\sqrt[3]{t}-\frac{1}{t}\right)^{20},$$

который не зависит от t.

Запишем k-й член разложения:

$$T_k=C_{20}^k\left(\sqrt[3]{t}\right)^{20-k}\left(-\frac{1}{t}\right)^k=(-1)^kC_{20}^kt^{\frac{20-k}{3}-k}.$$

Для независимости T_k от t необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{20-k}{3}-k=0,\quad \text{т. е. } k=5.$$

Следовательно, пятый член разложения не зависит от t.

Пример 6. Найти сумму всех биномиальных коэффициентов.

Положив в формуле (2) $a=1$, $b=1$, будем иметь

$$(1+1)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k.$$

Таким образом,

$$\sum_{k=0}^{n}C_n^k=C_n^0+C_n^1+C_n^2+\ldots+C_n^n=2^n.$$

Замечание. Смысл последнего равенства заключается в следующем. Так как C_n^k — это число всех подмножеств n-элементного множества, содержащих k элементов, то сумма

$$C_n^0+C_n^1+\ldots+C_n^n$$

дает, очевидно, число всех подмножеств n-элементного множества. Следовательно, число всех подмножеств множества, содержащего n элементов, равно 2^n.

Пример 7. Найти наибольший коэффициент многочлена

$$\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}x\right)^{10}.$$

Обозначим коэффициент многочлена при x^k через a_k. Используя формулу (2), расположим данный многочлен по возрастающим степеням переменной x:

$$\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}x\right)^{10}=\sum_{k=0}^{10}C_{10}^k\left(\frac{1}{3}\right)^{10-k}\left(\frac{2}{3}\right)^k x^k=\sum_{k=0}^{10}a_k x^k.$$

Для отыскания наибольшего коэффициента a_k решим неравенство $a_{k-1}\leqslant a_k$, т. е.

$$C_{10}^{k-1}\left(\frac{1}{3}\right)^{10-k+1}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\leqslant C_{10}^{k}\left(\frac{1}{3}\right)^{10-k}\left(\frac{2}{3}\right)^{k}.$$

Разделив обе части неравенства на $\frac{2^{k-1}}{3^{10}}$, получим

$$C_{10}^{k-1}\leqslant 2C_{10}^{k},$$

или

$$\frac{10!}{(k-1)!\,(10-k+1)!}\leqslant\frac{2\cdot 10!}{k!\,(10-k)!}.$$

После дальнейших очевидных сокращений будем иметь

$$\frac{1}{10-k+1}\leqslant\frac{2}{k},\quad k\leqslant 20-2k+2,\quad k\leqslant\frac{22}{3}.$$

Таким образом, доказано, что

$$a_0 < a_1 < \ldots < a_7.$$

Очевидно, что при $k > \frac{22}{3}$ имеет место противоположное неравенство $a_{k-1} > a_k$, т. е. коэффициенты многочлена, начиная с седьмого, убывают.

Итак, коэффициент a_7 является наибольшим среди всех одиннадцати коэффициентов данного многочлена. Наибольший коэффициент равен

$$C_{10}^7 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^7.$$

Упражнения

6.28. Напишите формулу Ньютона для степени бинома:

а) $(x^2-y)^6$; б) $(3a^2-2b)^5$.

6.29. Найдите разложение степени бинома:

а) $\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^7$; б) $\left(x^2-\frac{2}{x}\right)^8$.

6.30. Найдите разложение степени бинома и упростите полученное выражение:

а) $(\sqrt{2}-\sqrt{3})^5$; б) $(1+i\sqrt{3})^6$.

6.31. Найдите:

а) седьмой член разложения $(2x-3)^{10}$;

б) четвертый член разложения $\left(\sqrt[3]{a}+\frac{1}{\sqrt[3]{a}}\right)^9$.

6.32. Найдите:

а) средний член разложения $\left(\frac{1}{\sqrt[5]{x}}+\sqrt[3]{x}\right)^{10}$;

б) два средних члена разложения $\left(\sqrt{a}-\sqrt[3]{b}\right)^{13}$.

6.33. Найдите член разложения, не зависящий от x:

а) $\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^6$; б) $\left(\frac{1}{x}+\sqrt{x}\right)^{12}$.

6.34. Найдите член разложения, не зависящий от z:

а) $\left(\frac{1}{\sqrt[7]{z^2}}-2\sqrt{z}\right)^{11}$; б) $\left(z^{1/3}+z^{-1/2}\right)^{15}$.

6.35. Четвертый член разложения степени бинома

$$(a^{2/3}+a^{-1})^n$$

не содержит a. Найдите показатель степени n.

6.36. Сумма биномиальных коэффициентов разложения степени бинома

$$\left(2x+\frac{1}{x}\right)^n$$

равна 256. Найдите член разложения, не зависящий от x.

6.37. Найдите рациональные члены разложения:

а) $(\sqrt[6]{3}+\sqrt[5]{2})^{11}$; б) $(\sqrt{5}-\sqrt{2})^{8}$.

6.38. Найдите наибольший коэффициент многочлена:

а) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x\right)^{100}$; б) $\left(\frac{1}{10}+\frac{9}{10}x\right)^{12}$;

в) $\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{3}x\right)^{105}$; г) $(\sqrt{5}+\sqrt{2}x)^{20}$.

6.39. Найдите коэффициент многочлена:

а) $(1+x^2-x^3)^9$ при x^8;

б) $(1+3x+2x^3)^{10}$ при x^4.

6.40. Вычислите суммы:

а) $\sum\limits_{k=2}^{n-2} C_n^k$; б) $\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k$;

в) $\sum\limits_{k=0}^{n} C_{2n}^{2k}$; г) $\sum\limits_{k=1}^{n} C_{2n}^{2k-1}$.

6.41. Найдите сумму коэффициентов многочлена:

а) $(2x-1)^{100}$; б) $(x^3-x-1)^{99}$.

Глава VII

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

§ 20. Случайные события. Вероятность события

1. Случайные события и операции над ними. Под *случайным событием*, связанным с некоторым опытом, понимается всякое событие, которое при осуществлении этого опыта либо происходит, либо не происходит.

Если, например, опыт заключается в подбрасывании монеты, то случайным событием, связанным с этим опытом, будет «выпадение герба»: в одних случаях монета упадет так, что сверху окажется герб, т. е. событие «выпадение герба» произойдет, в других — монета ляжет гербом вниз и, следовательно, событие не осуществится. Случайными событиями являются также: «выпадение шестерки» при бросании игральной кости, выход из строя электролампы в течение определенного времени, гибель клетки под действием радиоактивного облучения. Во всех перечисленных случаях невозможно предсказать заранее, до опыта, произойдет или не произойдет соответствующее событие, так как результат зависит от слишком многих факторов, учесть которые не представляется возможным. Никакая наука, в том числе и математика, не претендует на то, чтобы делать какие-либо предсказания относительно исхода какого-либо одного подобного эксперимента Изучать случайное событие можно только тогда, когда есть хотя бы принципиальная возможность повторить опыт многократно и каждый раз фиксировать осуществление (или неосуществление) рассматриваемого события.

При выполнении этого условия можно ввести понятие о *частоте* случайного события. Пусть при n-кратном осуществлении опыта событие наступило k раз, тогда отношение $\frac{k}{n}$ даст частоту случайного события.

Пример 1. Французский естествоиспытатель Бюффон, изучая случайные события, провел опыт с

подбрасыванием монеты 4040 раз. Герб выпал в 2048 случаях. Следовательно, частота события «выпадение герба» в данном эксперименте равна

$$\frac{2048}{4040} \approx 0{,}507 \approx 0{,}5.$$

Пример 2. По теории Менделя при скрещивании желтого гороха с желтым примерно в одном случае из четырех получается зеленый горох. Для проверки этой теории опыт по скрещиванию желтого гороха был проведен 34 153 раза. В 8506 случаях получился зеленый горох. Частота события «появление зеленого гороха» в проведенном эксперименте равна

$$\frac{8506}{34\,153} \approx 0{,}252 \approx 0{,}25.$$

Эксперименты, рассмотренные в примерах 1, 2, повторялись неоднократно, и всякий раз, когда число проводимых опытов было достаточно велико, частота события «выпадение герба» оказывалась близкой к $\frac{1}{2}$, а частота события «появление зеленого гороха» мало отличалась от $\frac{1}{4}$. Описанное явление называется *статистической устойчивостью частоты* события. Эксперименты показывают, что свойство статистической устойчивости присуще многим случайным событиям, представляющим интерес для практики. События, обладающие свойством статистической устойчивости частоты, являются предметом изучения специальной математической дисциплины — теории вероятностей.

Теория вероятностей возникла в XVII веке в работах Паскаля, Ферма и Гюйгенса, причем ее первоначальное развитие связано с исследованием азартных игр. Следует отметить, что и в настоящее время при изучении и применении теории вероятностей азартные игры «используются» довольно широко. Дело в том, что случайные события, встречающиеся в азартных играх, обладая свойством статистической устойчивости частоты, имеют к тому же и другие преимущества. Они отличаются простотой, дают возможность четко поставить задачу, не загромождая ее побочными факторами, присущими той или иной специальной области знаний. Наконец, они обеспечивают возможность неограниченной эксперимен-

тальной проверки полученных закономерностей, так как именно в азартных играх можно сколько угодно раз ставить один и тот же опыт. Случайные события, связанные с азартными играми, служат, таким образом, чрезвычайно удобными моделями при изучении более сложных и, главное, более важных практических задач.

Теория вероятностей, начав свой путь с анализа ситуаций, возникающих в азартных играх, с выдачи рекомендаций игрокам в кости, превратилась в науку, без помощи которой сейчас не обходится ни физика, ни астрономия, ни экономика, ни лингвистика. Более того, в последнее время теория вероятностей стала основой развития многих новых научных направлений, таких, как математическая статистика, теория информации, теория массового обслуживания. Выдающуюся роль в становлении теории вероятностей как математической науки сыграли Я. Бернулли, А. Муавр, П. Лаплас, К. Гаусс, С. Пуассон. Большой вклад внесли в ее развитие русские ученые П. Л. Чебышев, А. А. Марков, А. М. Ляпунов; ряд основополагающих результатов в различных областях теории вероятностей получен советским математиком А. Н. Колмогоровым.

В теории вероятностей случайные события принято обозначать большими буквами латинского алфавита: A, B, C и т. д., иногда снабжая их индексами, например: A_1, A_m. Прилагательное «случайные» для краткости часто опускают и говорят просто «события».

Событие, всегда осуществляющееся при проведении опыта, называют *достоверным событием*.

В том случае, когда событие заведомо не может произойти в результате опыта, его называют *невозможным*.

Если в урне находятся только белые шары, а опыт заключается в извлечении наудачу шара из урны, то событие «извлечен белый шар» является достоверным, а событие «извлечен черный шар» — невозможным. Достоверные события будем обозначать буквой U, невозможные — буквой V.

События A и B называются *равносильными* (*равными*), если A происходит тогда и только тогда, когда происходит B. Равносильные события соединяют знаком равенства, т. е. пишут $A=B$. В опыте с подбрасыванием игральной кости событие «выпала шестерка» и событие «выпала грань с наибольшим возможным номером» равносильны.

Для каждого события A можно рассматривать событие, заключающееся в том, что событие A не произошло. Его называют *противоположным* к A и обозначают $\bar{A}$. Для достоверного и невозможного событий полагают $\bar{U}=V$, $\bar{V}=U$. Если опыт состоит в том, что стрелок производит выстрел по мишени, то событие «мишень поражена» и событие «стрелок не попал в мишень» являются противоположными друг к другу.

Для событий вводятся операции сложения и умножения.

Суммой (*объединением*) событий называется событие, которое осуществляется тогда и только тогда, когда происходит хотя бы одно из данных событий. Сумму событий A и B обозначают $A \cup B$.

Произведением (*пересечением*) событий называется событие, осуществляющееся только в том случае, когда данные события происходят одновременно. Произведение событий A и B обозначают $A \cap B$.

Пример 3. Пусть опыт заключается в том, что из колоды вынимается наудачу одна карта, и пусть событие A_1 состоит в том, что карта оказалась дамой, а событие A_2 — в том, что выбрана карта пиковой масти. Тогда событие $A_1 \cup A_2$ состоит в том, что выбрана дама или карта пиковой масти, а событие $A_1 \cap A_2$ — в том, что из колоды выбрана дама пик.

Легко видеть, что для операций сложения и умножения событий справедливы следующие законы:

$A \cup B = B \cup A$ — коммутативность сложения,

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ — ассоциативность сложения,

$A \cap B = B \cap A$ — коммутативность умножения,

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ — ассоциативность умножения,

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ — дистрибутивность.

Пример 4. Рассмотрим в опыте с подбрасыванием игральной кости события: A_1 — появление четного числа, A_2 — появление шестерки, A_3 — появление числа, большего двойки. Тогда $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ — событие, состоящее в том, что выпала грань, занумерованная одним из чисел: 2, 3, 4, 5, 6; $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ — событие, заключающееся в выпадении грани с шестеркой.

Пример 5. Пусть в опыте с подбрасыванием кости A_l — событие, состоящее в том, что кость выпала гранью с цифрой l. Тогда $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_6$ — событие, состоящее в том, что кость выпала одной из своих шести граней, а событие $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_6$ заключается в том, что кость

выпала всеми своими гранями одновременно. Очевидно, что

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_6 = U, \quad A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_6 = V.$$

События A_i и A_2 называются *несовместными*, если $A_1 \cap A_2 = V$.

События A_1, A_2, ..., A_m $(m > 2)$ называются *попарно несовместными*, если любые два из этих событий несовместны.

Говорят, что события A_1, A_2, ..., A_m образуют *полную систему событий*, если их сумма является достоверным событием.

События, рассмотренные в примере 4, полной системы событий не образуют. Напротив, события из примера 5 образуют полную систему, более того, они образуют полную систему попарно несовместных событий.

2. Опыт с равновероятными исходами. Классическое определение вероятности события. Рассмотрим полную систему попарно несовместных событий

$$U_1, U_2, \ldots, U_n,$$

связанную с некоторым опытом. Предположим, что в этом опыте осуществление каждого из событий $U_1, U_2, \ldots, U_n$ равновозможно, т. е. предположим, что не существует никаких объективных оснований считать, что одно из событий является более возможным, чем другое. Такой опыт будем называть *опытом с равновероятными исходами*. В этом случае будем говорить, что события U_1, U_2, ..., U_n *равновероятны* и что вероятность каждого из этих событий равна $1/n$.

События U_1, U_2, ..., U_n называются *исходами* или *элементарными событиями*.

Пример 1. Вернемся к опыту с подбрасыванием игральной кости. Пусть U_i — событие, состоящее в том, что кость выпала гранью с цифрой i. Так как кость предполагается однородной и симметричной, то все исходы опыта естественно считать одинаково возможными. Следовательно, рассматриваемый опыт является опытом с равновероятными исходами, события $U_1, U_2, \ldots, U_6$ равновероятны и вероятность каждого из них равна $\frac{1}{6}$.

Рассмотрим теперь событие A, связанное с опытом с равновероятными исходами, и пусть A наступает тогда, когда осуществляется один из каких-то k исходов, и не наступает, если осуществляется любой из оставшихся $n - k$

исходов. Будем говорить, что исходы, приводящие к наступлению события A, *благоприятствуют* событию A.

Определение. *Вероятностью* $\mathrm{P}(A)$ *события* A, связанного с опытом с равновероятными исходами, называется отношение числа исходов, благоприятствующих событию A, к числу всех исходов.

Таким образом, если n — число всех исходов, а k — число исходов, благоприятствующих событию A, то $\mathrm{P}(A)=\frac{k}{n}$.

Эта формула читается так: «вероятность события A равна $\frac{k}{n}$». P — первая буква английского слова «probability» — вероятность.

Пример 2. В опыте с игральной костью (см. пример 1) событию A (число выпавших очков кратно 3) благоприятствуют два элементарных события U_3 и U_6; событию B (выпало простое число) благоприятствуют U_2, U_3, U_5; событию C (выпало 7 очков) не благоприятствует ни одно из шести элементарных событий; событию D (число выпавших очков меньше 7) благоприятствуют все шесть элементарных событий. Следовательно,

$$\mathrm{P}(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3},\quad \mathrm{P}(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2},$$

$$\mathrm{P}(C)=\frac{0}{6}=0,\quad \mathrm{P}(D)=\frac{6}{6}=1.$$

Приведенное определение вероятности события называется *классическим определением вероятности*.

Вероятность события удовлетворяет неравенствам

$$0\leqslant \mathrm{P}(A)\leqslant 1,$$

что непосредственно следует из определения, так как очевидно, что $0\leqslant k\leqslant n$.

Невозможному событию V не благоприятствует ни одно из элементарных событий, и поэтому

$$\mathrm{P}(V)=\frac{0}{n}=0.$$

Достоверное событие U осуществляется при наступлении каждого из элементарных событий, и, следовательно,

$$\mathrm{P}(U)=\frac{n}{n}=1.$$

Элементарному событию U_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ благоприятствует только одно элементарное событие (оно само), и, следовательно,

$$P(U_i) = \frac{1}{n}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

что соответствует данному ранее определению.

Пример 3. Монета бросается дважды. Какова вероятность того, что хотя бы один раз выпадет герб?

Здесь элементарными событиями будут следующие 4 события:

U_1 — оба раза выпал герб,

U_2 — герб появился только при первом бросании,

U_3 — герб появился только при втором бросании,

U_4 — герб не появился ни разу.

Благоприятствовать событию A (появлению герба хотя бы один раз) будут U_1, U_2, U_3. Следовательно, $P(A) = \frac{3}{4}$.

Пример 4. Набирая номер телефона, абонент забыл две последние цифры и, помня лишь, что эти цифры различны, набрал их наудачу. Какова вероятность того, что номер набран правильно?

Две последние цифры можно набрать A_{10}^2 способами, а благоприятствовать событию A (цифры набраны правильно) будет только один способ. Поэтому

$$P(A) = \frac{1}{A_{10}^2} = \frac{1}{10 \cdot 9} = \frac{1}{90}.$$

Пример 5. Среди 100 электроламп 5 испорченных. Какова вероятность того, что выбранные наудачу 3 лампы окажутся исправными?

Из 100 электроламп 3 лампы можно выбрать C_{100}^3 способами. Три исправных лампы из общего числа 95 исправных ламп можно выбрать C_{95}^3 способами. Следовательно, искомая вероятность равна

$$P = \frac{C_{95}^3}{C_{100}^3} = \frac{95 \cdot 94 \cdot 93}{100 \cdot 99 \cdot 98} \approx 0{,}86.$$

Замечание. Классическое определение вероятности события не является универсальным, пригодным для изучения произвольных случайных событий. Оно применимо только в простейших случаях, когда удается свести дело к рассмотрению конечного множества равновозможных событий. В более сложных опытах приходится считаться

и с тем, что число различных исходов может быть бесконечным, и с тем, что сами исходы не являются равновозможными. Поэтому в теории вероятностей, наряду с классическим определением, используются и другие определения вероятности события.

При так называемом статистическом определении вероятность события определяется исходя из понятия частоты события и ее статистической устойчивости. Например, при скрещивании желтого гороха с желтым (см. пример 2 п. 1) за вероятность события «появление зеленого гороха» принимается число, равное $\frac{1}{4}$, так как именно около этого числа, как показывают эксперименты, группируются частоты рассматриваемого события.

В современных математических курсах вероятность определяется аксиоматически, как функция $\mathbf{P}(A)$, определенная на множестве событий и удовлетворяющая следующим трем аксиомам:

1. Для произвольного события A справедливо неравенство $\mathbf{P}(A) \geqslant 0$.
2. Вероятность достоверного события равна единице.
3. Вероятность суммы попарно несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.

Упражнения

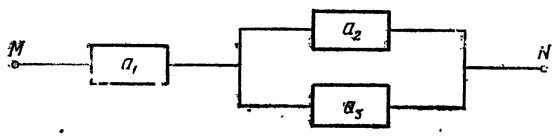
7.1. По мишени произведено три выстрела. Пусть событие A_i состоит в том, что i-й выстрел удачный. В чем заключаются следующие события:

а) $A_1 \cup A_2 \cup A_3$;

б) $A_1 \cap A_2 \cap A_3$;

в) $(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3) \cup (\bar{A}_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3) \cup (A_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3)$?

7.2. Электрическая цепь составлена по схеме, изображенной на рисунке.



Как выражаются события B и $\bar{B}$ через события A_i $(i = 1, 2, 3)$, если событие B заключается в том, что цепь MN не приводит ток, а событие A_i состоит в том, что элемент a_i вышел из строя?

7.3. По мишени производится два выстрела. Образуют ли события A (мишень поражена) и B (по крайней мере один выстрел был

неудачным) полную систему событий? Являются ли события A и B несовместными?

7.4. Укажите три события, которые не являются попарно несовместными, но образуют полную систему событий.

7.5. Из урны, в которой находятся 3 белых, 4 черных, 5 красных шаров, наудачу вынимается один. Какова вероятность того, что вынутый шар окажется

а) белым; б) черным; в) желтым; г) красным?

7.6. Бросаются две игральные кости. Какова вероятность того, что сумма очков, выпавших на двух костях, окажется равной 8?

7.7. В лотерее из 50 билетов 8 выигрышных. Какова вероятность того, что среди первых пяти наугад выбранных билетов два будут выигрышными?

7.8. Первенство по баскетболу разыгрывают 18 команд, среди которых 2 команды экстракласса. Для уменьшения общего числа игр команды путем жеребьевки разбиваются на две равные группы. Какова вероятность того, что две команды экстракласса окажутся

а) в разных подгруппах;

б) в одной подгруппе?

§ 21. Основные теоремы теории вероятностей и их следствия

1. Теорема сложения. В рассмотренных выше примерах вероятность событий вычислялась непосредственно, исходя из определения. К сожалению, этот путь приводит к успеху только в самых простых случаях. Обычно же прямой подсчет как всех исходов, так и тех из них, которые являются благоприятствующими, оказывается неудобным, а иногда и практически невозможным из-за своей чрезмерной сложности. Вычисление вероятностей событий, как правило, можно существенно упростить, если использовать теоремы, устанавливающие связи между вероятностями событий.

Теорема 1. *Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий, т. е.*

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B). \qquad (1)$$

Доказательство. Пусть событию A благоприятствуют k исходов, событию B — l исходов. События A и B несовместны, поэтому среди исходов U_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ нет таких, которые одновременно благоприятствовали бы и событию A, и событию B. Следовательно, событию $A \cup B$ будет благоприятствовать ровно $k + l$ исходов. По определению вероятности имеем

$$\mathrm{P}(A) = \frac{k}{n}, \quad \mathrm{P}(B) = \frac{l}{n}, \quad \mathrm{P}(A \cup B) = \frac{k+l}{n},$$

откуда и следует утверждение теоремы. Отметим, что при доказательстве существенно использовалось предположение о несовместности событий.

Доказанная теорема называется *теоремой сложения несовместных событий.*

Следствие. *Сумма вероятностей противоположных событий равна единице, т. е.*

$$\mathsf{P}(A)+\mathsf{P}(\bar{A})=1. \qquad (2)$$

Поскольку события A и $\bar{A}$ несовместны, к ним применима теорема сложения:

$$\mathsf{P}(A\cup\bar{A})=\mathsf{P}(A)+\mathsf{P}(\bar{A}).$$

Учитывая, что событие $A\cup\bar{A}$ достоверное и что поэтому $\mathsf{P}(A\cup\bar{A})=1$, получаем $\mathsf{P}(A)+\mathsf{P}(\bar{A})=1$.

Обобщением теоремы сложения на случай любого конечного числа событий является следующее утверждение:

вероятность суммы попарно несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий, т. е.

$$\mathsf{P}(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_m)=\mathsf{P}(A_1)+\mathsf{P}(A_2)+\ldots+\mathsf{P}(A_m). \qquad (3)$$

Доказательство аналогично доказательству для случая двух слагаемых.

Теорема сложения для двух событий обобщается и в другом направлении. Если отказаться от требования обязательной несовместности событий, то можно доказать более общую теорему, из которой доказанная ранее теорема 1 получается как частный случай.

Теорема 2. *Вероятность суммы двух произвольных событий равна сумме вероятностей событий без вероятности их произведения, т. е.*

$$\mathsf{P}(A\cup B)=\mathsf{P}(A)+\mathsf{P}(B)-\mathsf{P}(A\cap B). \qquad (4)$$

Доказательство. Пусть событию A благоприятствуют k исходов, событию B — l исходов, и пусть q исходов благоприятствуют совместному осуществлению событий A и B. Если число всех исходов равно n, то по определению вероятности

$$\mathsf{P}(A)=\frac{k}{n},\quad \mathsf{P}(B)=\frac{l}{n},\quad \mathsf{P}(A\cap B)=\frac{q}{n}.$$

Легко видеть, что событию $A\cup B$ будут благоприятствовать в этом случае $k+l-q$ исходов, и, следовательно,

$$P(A \cup B) = \frac{k+l-q}{n} = \frac{k}{n} + \frac{l}{n} - \frac{q}{n} = P(A) + P(B) - P(A \cap B),$$

т. е. формула (4) справедлива.

В частном случае, когда события несовместны, т. е. $A \cap B = V$ и $P(A \cap B) = 0$, получается ранее доказанная теорема 1.

2. Условная вероятность. Теорема умножения. Независимость событий. Простейшие наблюдения показывают, что в одних случаях осуществление одного события никак не влияет на вероятность осуществления другого, в других случаях, наоборот, наступление одного события существенно изменяет вероятность наступления другого.

Например, в опыте с двукратным подбрасыванием монеты вероятность события «герб появился при вторичном подбрасывании монеты» не зависит от того, произошло или не произошло событие «герб появился при первом подбрасывании монеты». В опыте с извлечением (без возвращения) шаров из урны, содержащей один белый шар и один черный, отношение между событиями «шар, извлеченный первым, оказался белым» и «шар, извлеченный вторым, оказался белым» совсем иное: осуществление одного события в этом случае приводит к тому, что другое становится невозможным.

Рассмотрим события A и B, связанные с некоторым опытом. Пусть событию B благоприятствуют l исходов, событию $A \cap B - q$ исходов. Отношение $\frac{q}{l}$, т. е. отношение числа исходов, благоприятствующих событию $A \cap B$, к числу исходов, благоприятствующих событию B, называется *условной вероятностью события* A при условии B и обозначается

$$P(A \mid B).$$

Таким образом, по определению

$$P(A \mid B) = \frac{q}{l}.$$

Поясним данное определение примером. Пусть опыт заключается в однократном бросании игральной кости, событие B — выпадение четного числа очков, событие A — выпадение шестерки. В этом случае событию B благоприятствуют 3 исхода ($l = 3$), событию $A \cap B$ благоприятствует только один исход ($q = 1$). Следовательно, услов-

ная вероятность события A при условии B равна $\frac{q}{l}=\frac{1}{3}$, т. е. $\mathrm{P}(A|B)=\frac{1}{3}$.

Теорема 1. *Для условной вероятности* $\mathrm{P}(A|B)$ *справедлива формула*

$$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}. \qquad (1)$$

Формула (1) называется *формулой условной вероятности.*

Доказательство. Пусть l — число исходов, благоприятствующих событию B; q — число исходов, благоприятствующих событию $A\cap B$. Тогда

$$\mathrm{P}(A|B)=\frac{q}{l},$$

или

$$\mathrm{P}(A|B)=\frac{q/n}{l/n},$$

где n — число всех исходов. Учитывая, что

$$\frac{q}{n}=\mathrm{P}(A\cap B) \text{ и } \frac{l}{n}=\mathrm{P}(B),$$

получаем формулу (1).

Для условной вероятности события B при условии A совершенно аналогично получается формула

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}. \qquad (2)$$

Формулы (1) и (2) можно переписать в следующем виде:

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A|B). \qquad (3)$$

Формула (3) дает выражение вероятности произведения двух произвольных событий через вероятности и условные вероятности этих событий. Таким образом, доказана теорема, которая называется *теоремой умножения.*

Теорема 2. *Вероятность произведения двух произвольных событий равна вероятности одного из этих событий, умноженной на условную вероятность другого, при условии, что первое произошло.*

Используя понятие условной вероятности, можно ввести важное понятие независимости двух событий.

Определение 1. Событие A называется *независимым* от события B, если условная вероятность события A при условии B равна вероятности события A, т. е. если

$$\mathsf{P}(A \mid B) = \mathsf{P}(A).$$

В противном случае, т. е. если $\mathsf{P}(A \mid B) \neq \mathsf{P}(A)$, событие A называется *зависимым* от события B.

Из формулы (3) следует, что если событие A является независимым от B, то событие B будет независимым от A. Таким образом, свойство независимости оказывается взаимным.

Пример 1. Из колоды в 36 карт наудачу вынимается одна. Являются ли события A (появился туз) и B (вынута карта красной масти) независимыми?

Из общего числа 36 элементарных событий событию A благоприятствуют 4, поэтому $\mathsf{P}(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$. Если событие B произошло, то это означает, что осуществилось одно из 18 элементарных событий, среди которых событию A благоприятствуют два, следовательно, $\mathsf{P}(A \mid B) = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}$.

Итак, $\mathsf{P}(A \mid B) = \mathsf{P}(A)$, т. е. события A и B независимы.

Из теоремы умножения как частный случай получается теорема умножения для независимых событий.

Теорема 3. *Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:*

$$\mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(A) \cdot \mathsf{P}(B). \qquad (4)$$

Действительно, если A и B — независимые события, то $\mathsf{P}(B \mid A) = \mathsf{P}(B)$, и формула (3) превращается в формулу (4).

Обобщим теорему 3 на случай любого конечного числа событий. Дадим прежде всего следующее определение.

Определение 2. События $A_1, A_2, \ldots, A_m$ $(m > 2)$ называются *независимыми в совокупности*, если каждое из этих событий и событие, являющееся произведением любого числа остальных событий, независимы.

Поясним разницу между попарной независимостью и независимостью в совокупности на примере трех событий. Для попарной независимости событий A, B, C необходимо, чтобы события A и B, B и C, C и A были не-

зависимы. Для независимости в совокупности, помимо этого, нужна независимость еще трех пар событий:

$$A \text{ и } B \cap C, \quad B \text{ и } C \cap A, \quad C \text{ и } A \cap B.$$

Теорема 4. *Вероятность произведения независимых в совокупности событий равна произведению вероятностей этих событий. Например, если A, B, C — независимые в совокупности события, то*

$$\mathbf{P}(A \cap B \cap C) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)\mathbf{P}(C). \tag{5}$$

Доказательство. Положим $B \cap C = D$ и, поскольку события A и D независимы, по теореме 3 можем записать

$$\mathbf{P}(A \cap B \cap C) = \mathbf{P}(A \cap D) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(D),$$

но B и C также независимы, и поэтому

$$\mathbf{P}(D) = \mathbf{P}(B \cap C) = \mathbf{P}(B)\mathbf{P}(C).$$

Подставляя $\mathbf{P}(D)$ в первую из формул, получаем утверждение теоремы.

Методом математической индукции эта теорема легко доказывается для любого конечного числа независимых в совокупности событий.

Замечание. Теоремы сложения и умножения доказаны здесь для опытов с равновероятными исходами. Однако все полученные формулы сохраняют свою силу и в более сложных случаях, когда классическое определение вероятности оказывается недостаточным и приходится исходить из статистического или аксиоматического определений. При аксиоматическом построении теории вероятностей формула (1) п. 1, как уже отмечалось, принимается за аксиому, в связи с чем ее называют законом сложения вероятностей. Формулами (1) и (4) вводятся понятия условной вероятности и независимости событий.

В следующих примерах доказанные теоремы используются для вычисления вероятностей различных событий.

Пример 2. Из партии изделий ОТК проверяет половину и признает годной всю партию, если среди проверенных изделий бракованных не более одного. Какова вероятность того, что партия из 20 изделий, в которой 2 бракованных, будет признана годной?

Пусть событие A состоит в том, что среди проверяемых изделий бракованных не окажется, а событие B — в том, что среди отобранных для проверки изделий одно

бракованное. Партия изделий будет признана годной, если произойдет событие $A \cup B$. События A и B несовместны и, следовательно, справедлива формула

$$\mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B).$$

Подсчитаем вероятность события A. Из 20 изделий можно отобрать для проверки 10 изделий C_{20}^{10} способами. Из небракованных изделий 10 изделий отбираются C_{18}^{10} способами. Поэтому $\mathsf{P}(A) = \frac{C_{18}^{10}}{C_{20}^{10}} = \frac{18!\,10!}{8!\,20!} = \frac{10 \cdot 9}{20 \cdot 19} = \frac{9}{38}$.

Для события B количество благоприятных исходов равно $C_{18}^{9} \cdot C_2^1$ (число способов отбора 9 небракованных изделий и одного бракованного), и поэтому

$$\mathsf{P}(B) = \frac{C_{18}^{9} C_2^1}{C_{20}^{10}} = \frac{18!\,10!\,10!\,2}{9!\,9!\,20!} = \frac{10 \cdot 10 \cdot 2}{20 \cdot 19} = \frac{20}{38}.$$

По теореме сложения для несовместных событий получаем $\mathsf{P}(A \cup B) = \frac{9}{38} + \frac{20}{38} = \frac{29}{38}$.

Пример 3. Из колоды в 36 карт наудачу вынимается одна. Какова вероятность того, что будет вынута пика или туз?

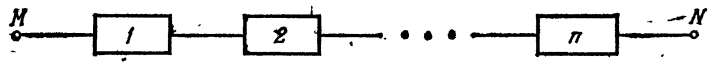
События A (выбрана пика) и B (появился туз) не являются несовместными. Поэтому для вычисления искомой вероятности события $A \cup B$ воспользуемся формулой $\mathsf{P}(A \cup B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A \cap B)$.

Вероятности событий A, B и $A \cap B$ легко подсчитываются:

$$\mathsf{P}(A) = \frac{1}{4}, \quad \mathsf{P}(B) = \frac{1}{9}, \quad \mathsf{P}(A \cap B) = \frac{1}{36}.$$

Таким образом, $\mathsf{P}(A \cup B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{36} = \frac{1}{3}$.

Пример 4. Участок электрической цепи состоит из n последовательно соединенных элементов, каждый из которых работает независимо от остальных. Известна вероятность невыхода из строя за определенный промежуток времени (так называемая надежность) каждого элемента: $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Найти вероятность исправной работы всего участка цепи (надежность участка).



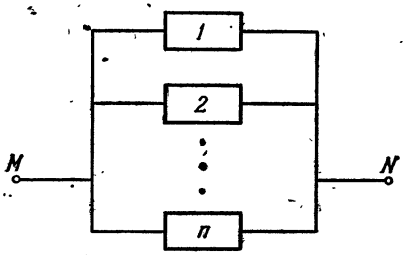
Обозначим через A_i событие, заключающееся в исправной работе элемента i, через A — событие, состоящее в нормальной работе всего участка. Тогда

$$A = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$$

и, поскольку события A_i независимы в совокупности,

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A_1)\mathrm{P}(A_2) \ldots \mathrm{P}(A_n) = p_1 p_2 \ldots p_n.$$

Пример 5. Участок электрической цепи состоит из n параллельно соединенных элементов, каждый из которых работает независимо от остальных. Известна вероятность



невыхода из строя за определенный промежуток времени каждого элемента: $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Определить вероятность исправной работы всего участка цепи (надежность участка).

Пусть A_i и A — события, рассмотренные в примере 4. Для определения вероятности события A удобно предварительно вычислить вероятность события $\bar{A}$. Легко сообразить, что

$$\bar{A} = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \ldots \cap \bar{A}_n,$$

так как весь участок цепи выходит из строя тогда и только тогда, когда выходят из строя все элементы цепи. По условию задачи события A_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ независимы в совокупности, следовательно, события $\bar{A}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ также независимы в совокупности. Согласно теореме умножения для независимых в совокупности событий получаем

$$\mathrm{P}(\bar{A}) = \mathrm{P}(\bar{A}_1)\mathrm{P}(\bar{A}_2) \ldots \mathrm{P}(\bar{A}_n),$$

откуда

$$1 - \mathrm{P}(A) = (1 - \mathrm{P}(A_1))(1 - \mathrm{P}(A_2)) \ldots (1 - \mathrm{P}(A_n)),$$

и, следовательно,

$$\mathrm{P}(A) = 1 - (1-p_1)(1-p_2)\ldots(1-p_n).$$

Пример 6. Рассматривается та же схема, что и в предыдущем примере, но $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = p = 0{,}7$. Сколько элементов должен содержать участок электрической цепи, чтобы его надежность превышала 0,99?

Согласно результату, полученному в предыдущем примере, $\mathrm{P}(A) = 1 - (1-p)^n$. Для числа элементов n получаем неравенство

$$1 - (1-p)^n > 0{,}99,$$

решая которое находим n:

$$(1-p)^n < 0{,}01,$$

$$n \lg (1-p) < \lg 0{,}01 = -2, \quad n > -\frac{2}{\lg (1-p)}.$$

Если $p = 0{,}7$, то $n > -\frac{2}{\lg 0{,}3} \approx 3{,}8$, т. е. в этом случае участок цепи должен содержать не менее 4 элементов.

3. Формула полной вероятности. Пусть $H_1, H_2, \ldots, H_n$ — полная система попарно несовместных событий, связанная с некоторым опытом, и A — произвольное событие, связанное с тем же опытом. Очевидно, что для произвольного события A справедливо равенство

$$A = A \cap U.$$

С другой стороны, по определению полной системы событий

$$U = H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_n,$$

и поэтому

$$A = A \cap (H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_n).$$

Последнее соотношение, опираясь на дистрибутивный закон, можно переписать так:

$$A = (A \cap H_1) \cup (A \cap H_2) \cup \ldots \cup (A \cap H_n).$$

Легко доказать, что если события $H_1, H_2, \ldots, H_n$ попарно несовместны, то и события $A \cap H_1$, $A \cap H_2$, $\ldots$, $A \cap H_n$ также попарно несовместны. В самом деле,

$$(A \cap H_i) \cap (A \cap H_j) = (A \cap A) \cap (H_i \cap H_j) = A \cap V = V$$

для любых i и j $(i \neq j)$.

По теореме сложения для попарно несовместных событий получаем

$$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A\cap H_1)+\mathrm{P}(A\cap H_2)+\ldots+\mathrm{P}(A\cap H_n),$$

или, короче,

$$\mathrm{P}(A)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{P}(A\cap H_i).$$

Но по теореме умножения

$$\mathrm{P}(A\cap H_i)=\mathrm{P}(H_i)\,\mathrm{P}(A\,|\,H_i),$$

и, следовательно,

$$\mathrm{P}(A)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{P}(H_i)\,\mathrm{P}(A\,|\,H_i). \qquad (1)$$

Эта формула называется *формулой полной вероятности*. События H_1, H_2, ..., H_n обычно называют *гипотезами*.

Формула (1) используется в тех случаях, когда непосредственно найти вероятность события A трудно, в то время как условные вероятности $\mathrm{P}(A\,|\,H_i)$ и вероятности гипотез $\mathrm{P}(H_i)$ вычисляются легко.

Пример 1. Из 50 деталей 18 изготовлены в первом цехе, 20 — во втором, остальные — в третьем. Первый и третий цехи дают продукцию отличного качества с вероятностью 0,9, второй цех — с вероятностью 0,6. Какова вероятность того, что взятая наудачу деталь будет отличного качества?

Пусть событие A состоит в том, что выбрана деталь отличного качества. Через H_1, H_2, H_3 обозначим события (гипотезы), заключающиеся в том, что выбранная деталь изготовлена соответственно в первом, во втором и в третьем цехах. Вероятности гипотез легко находятся:

$$\mathrm{P}(H_1)=\frac{18}{50},\quad \mathrm{P}(H_2)=\frac{20}{50},\quad \mathrm{P}(H_3)=\frac{12}{50}.$$

Условные вероятности события A при условии, что имеют место гипотезы H_1, H_2 или H_3, заданы, причем

$$\mathrm{P}(A\,|\,H_1)=0{,}9,\ \mathrm{P}(A\,|\,H_2)=0{,}6,\ \mathrm{P}(A\,|\,H_3)=0{,}9.$$

По формуле полной вероятности находим искомую вероятность:

$$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(H_1)\,\mathrm{P}(A\,|\,H_1)+\mathrm{P}(H_2)\,\mathrm{P}(A\,|\,H_2)+\mathrm{P}(H_3)\,\mathrm{P}(A\,|\,H_3)=$$
$$=\frac{9}{10}\cdot\frac{18}{50}+\frac{6}{10}\cdot\frac{20}{50}+\frac{9}{10}\cdot\frac{12}{50}=\frac{39}{50}=0{,}78.$$

Пример 2. Студент Петров знает не все экзаменационные билеты. Что для него выгоднее: отвечать первым или вторым?

Будем называть «хорошими» те билеты, которые Петров знает. Предположим, что число «хороших» билетов равно k при общем числе всех билетов n $(k < n)$. Тогда вероятность события A (Петров взял «хороший» билет) в том случае, когда он отвечает первым, равна $\mathrm{P}(A) = \frac{k}{n}$. В случае, когда Петров отвечает вторым, для определения вероятности события A рассмотрим две гипотезы: H_1 (студенту, отвечавшему до Петрова, достался «хороший» билет) и H_2 (студент, отвечавший первым, вытащил «плохой» билет). Вероятности гипотез H_1 и H_2, очевидно, равны

$$\mathrm{P}(H_1) = \frac{k}{n} \text{ и } \mathrm{P}(H_2) = \frac{n-k}{n}.$$

Условная вероятность события A при условии осуществления гипотезы H_1 равна

$$\mathrm{P}(A \mid H_1) = \frac{k-1}{n-1}.$$

В случае, если имела место вторая гипотеза, условная вероятность события A равна

$$\mathrm{P}(A \mid H_2) = \frac{k}{n-1}.$$

По формуле полной вероятности находим

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(H_1)\,\mathrm{P}(A \mid H_1) + \mathrm{P}(H_2)\,\mathrm{P}(A \mid H_2) =$$

$$= \frac{k}{n} \cdot \frac{k-1}{n-1} + \frac{n-k}{n} \cdot \frac{k}{n-1} = \frac{k}{n} \cdot \frac{1}{n-1}(k-1+n-k) = \frac{k}{n}.$$

Таким образом, вероятность получить «хороший» билет одна и та же в обоих случаях, т. е. не зависит от того, отвечает Петров первым или вторым.

4. Формулы Байеса. Представим себе следующую ситуацию. Имеется урна, в которой лежат три шара. Шары могут быть либо белого цвета, либо черного, но совершенно не известно, сколько в урне белых шаров и сколько черных. В этих условиях можно выдвинуть четыре гипотезы о цвете шаров в урне, а именно: гипотезу H_0 — в урне 0 шаров белого цвета, гипотезу H_1 — в урне 1 белый шар, гипотезу H_2 — в урне 2 белых шара и, наконец, гипотезу H_3 — в урне 3 белых шара. Все

эти гипотезы приходится считать равновероятными, поскольку нет никаких сведений о количестве белых шаров в урне. Допустим теперь, что из урны наудачу вынимается один шар и он оказывается белым. Ясно, что после проделанного эксперимента уже совершенно неестественно считать, что все четыре гипотезы о количестве белых шаров в урне одинаково вероятны. Поскольку случайно вынутый шар оказался белым, есть основания считать более вероятным, что белых шаров в урне больше, чем черных, а гипотезу H_0 после состоявшегося эксперимента вообще придется отбросить. Таким образом, тот факт, что случайно вынутый шар оказался белым, заставляет нас переоценить вероятности гипотез. Эта переоценка вероятностей гипотез осуществляется с помощью формул Байеса, которые легко выводятся из теоремы умножения и формулы полной вероятности.

Пусть A — произвольное событие и $H_1, H_2, \ldots, H_n$ — полная система попарно несовместных событий, тогда по теореме умножения

$$\mathsf{P}(A \cap H_i) = \mathsf{P}(A)\,\mathsf{P}(H_i \mid A) = \mathsf{P}(H_i)\,\mathsf{P}(A \mid H_i),$$

откуда

$$\mathsf{P}(H_i \mid A) = \frac{\mathsf{P}(H_i)\,\mathsf{P}(A \mid H_i)}{\mathsf{P}(A)}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Заменяя теперь $\mathsf{P}(A)$ ее выражением по формуле полной вероятности, получаем формулы

$$\mathsf{P}(H_i \mid A) = \frac{\mathsf{P}(H_i)\,\mathsf{P}(A \mid H_i)}{\sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(H_i)\,\mathsf{P}(A \mid H_i)}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \quad (1)$$

Их называют *формулами Байеса*.

Формулы (1) дают выражения для условных вероятностей гипотез H_i при условии, что произошло событие A, через вероятности $\mathsf{P}(H_i)$ и условные вероятности $\mathsf{P}(A \mid H_i)$, вычисленные до того, как событие A осуществилось.

Вернемся к задаче о переоценке вероятностей гипотез в случае урны с тремя шарами. Пусть A — событие, заключающееся в том, что вынутый наудачу из урны шар оказался белым. Вероятности события A при условии, что имеют место гипотезы H_0, H_1, H_2, H_3, легко

вычисляются:

$$P(A|H_0)=0,\quad P(A|H_1)=\frac{1}{3},$$
$$P(A|H_2)=\frac{2}{3},\quad P(A|H_3)=1,$$

а так как все предположения о количестве белых шаров в урне одинаково правдоподобны, то

$$P(H_0)=\frac{1}{4},\quad P(H_1)=\frac{1}{4},\quad P(H_2)=\frac{1}{4},\quad P(H_3)=\frac{1}{4}.$$

По формулам Байеса получаем

$$P(H_0|A)=\frac{\frac{1}{4}\cdot 0}{\frac{1}{4}\cdot 0+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\cdot 1}=0,$$

$$P(H_1|A)=\frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{4}\cdot 0+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\cdot 1}=\frac{1}{6},$$

$$P(H_2|A)=\frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}}{\frac{1}{4}\cdot 0+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\cdot 1}=\frac{1}{3},$$

$$P(H_3|A)=\frac{\frac{1}{4}\cdot 1}{\frac{1}{4}\cdot 0+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\cdot 1}=\frac{1}{2}.$$

Таким образом, если до того, как из урны был вынут шар, у нас не было никаких оснований отдавать предпочтение какой-либо из четырех гипотез и вероятность каждой из них мы вынуждены были считать равной $\frac{1}{4}$, то после того, как был вынут белый шар, мы переоцениваем вероятности гипотез, причем вероятности того, что в урне было 0, 1, 2, 3 белых шара, считаем равными соответственно 0, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$.

Пример. Партия деталей изготовлена тремя рабочими, причем первый рабочий изготовил 25% всех деталей, второй 35%, третий 40%. В продукции первого рабочего брак составляет 5%, в продукции второго 4% и в продукции третьего 2%. Случайно выбранная для

контроля деталь оказалась бракованной. Какова вероятность того, что она изготовлена вторым рабочим?

Обозначим через H_1, H_2 и H_3 гипотезы, заключающиеся в том, что случайно выбранная для контроля деталь изготовлена соответственно первым, вторым и третьим рабочим. Так как первый рабочий изготовил 25%, второй 35% и третий 40% всех деталей, то

$$P(H_1)=\frac{25}{100},\quad P(H_2)=\frac{35}{100},\quad P(H_3)=\frac{40}{100}.$$

Пусть A — событие, состоящее в том, что выбранная для контроля деталь оказывается бракованной. Вероятности события A при условии, что имеют место гипотезы H_1, H_2 и H_3, даны в условии задачи, а именно:

$$P(A\mid H_1)=\frac{5}{100},\quad P(A\mid H_2)=\frac{4}{100},\quad P(A\mid H_3)=\frac{2}{100}.$$

По формуле Байеса находим

$$P(H_2\mid A)=\frac{P(H_2)P(A\mid H_2)}{P(H_1)P(A\mid H_1)+P(H_2)P(A\mid H_2)+P(H_3)P(A\mid H_3)}=$$

$$=\frac{\frac{35}{100}\cdot\frac{4}{100}}{\frac{25}{100}\cdot\frac{5}{100}+\frac{35}{100}\cdot\frac{4}{100}+\frac{40}{100}\cdot\frac{2}{100}}=$$

$$=\frac{35\cdot 4}{25\cdot 5+35\cdot 4+40\cdot 2}=\frac{28}{69}.$$

Упражнения

7.9. Докажите, что если события A и B независимы, то события A и $\overline{B}$ также независимы.

7.10. Докажите, что если события A и B независимы, то события $\overline{A}$ и $\overline{B}$ также независимы.

7.11. Два стрелка, для которых вероятности попадания в мишень равны соответственно 0,7 и 0,8, производят по одному выстрелу. Определите вероятность:

а) хотя бы одного попадания в мишень;

б) одного попадания в мишень.

7.12. Студент знает 20 из 25 вопросов программы. Вычислите вероятность того, что студент знает предложенные ему экзаменатором два вопроса.

7.13. Могут ли несовместные события быть попарно независимыми?

7.14. Являются ли независимыми в совокупности события, образующие полную систему событий?

7.15. Опыт состоит в двукратном подбрасывании монеты. Рассмотрим события: A (герб появился в первый раз), B (герб появился

котя бы один раз), C (герб появился во второй раз). Определите, зависимы или независимы пары событий A и B, B и C, C и A.

7.16. Бросаются две игральные кости. Рассмотрите события:

A — на первой кости выпало нечетное число очков;

B — на второй кости выпало нечетное число очков;

C — сумма очков, выпавших на двух костях, нечетна.

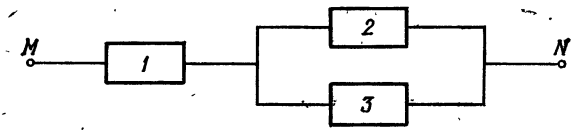
Будут ли события A, B, C попарно независимыми? Будут ли они независимыми в совокупности?

7.17. Рабочий обслуживает 3 станка, каждый из которых работает независимо от двух других. Вероятности того, что за смену станки не потребуют вмешательства рабочего, равны соответственно

$$p_1=0{,}4, \quad p_2=0{,}3, \quad p_3=0{,}2.$$

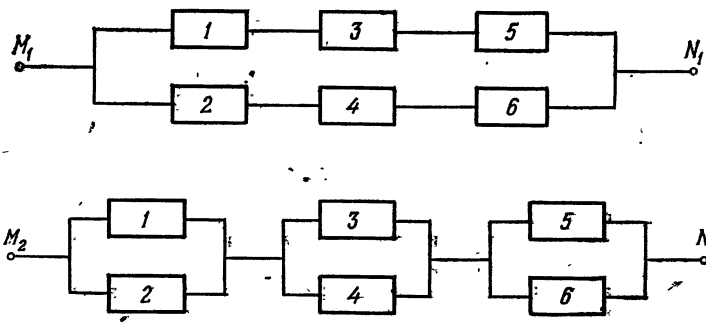
Найдите вероятность того, что за смену по крайней мере один станок потребует вмешательства рабочего.

7.18. Участок электрической цепи состоит из трех элементов, каждый из которых работает независимо от двух других. Элементы



не выходят из строя за определенный промежуток времени соответственно с вероятностью $p_1=0{,}9$, $p_2=p_3=0{,}7$. Определите вероятность нормальной работы всего участка.

7.19. Два участка электрической цепи составлены по схемам, изображенным на рисунке. Каждый элемент работает независимо от



остальных и не выходит из строя в течение определенного промежутка времени с вероятностью p. Определите вероятность нормальной работы каждого участка. Какой участок цепи является более надежным?

7.20. В телевизоре 12 ламп. Каждая лампа работает независимо от остальных и не выходит из строя в течение года с вероятностью p. Какова вероятность того, что в течение года хотя бы одна лампа выйдет из строя?

7.21. Сколько раз нужно бросить игральную кость, чтобы шестерка появилась хотя бы один раз с вероятностью, большей 0,9?

7.22. Из урны, содержащей 2 белых и 4 черных шара, двое поочередно извлекают по одному шару. Определите для каждого участника вероятность первым извлечь белый шар.

7.23. Прибор работает в двух режимах: в благоприятном и в неблагоприятном, причем в благоприятном режиме работа прибора происходит в 80% всех случаев. Вероятность выхода прибора из строя в течение часа при благоприятном режиме работы равна 0,1, при неблагоприятном — 0,7. Определите вероятность безотказной работы прибора в течение часа.

7.24. Три станка производят соответственно 50%, 30% и 20% всех изделий. В их продукции брак составляет соответственно 1%, 2% и 1,5%. Какова вероятность того, что выбранное наугад изделие окажется бракованным?

7.25. Радиолампа поступила с одного из трех заводов соответственно с вероятностями 0,25; 0,50 и 0,25. Вероятность выйти из строя в течение года для ламп, изготовленных первым заводом, равна 0,1, вторым заводом — 0,2 и третьим — 0,4. Определите вероятность того, что лампа проработает год.

7.26. Два автомата производят одинаковые изделия. Производительность первого автомата вдвое больше производительности второго. Первый автомат дает 60% первосортных изделий, второй — 84%. Наудачу выбранное изделие оказалось первосортным. Какова вероятность того, что оно изготовлено первым автоматом?

7.27. Известно, что 96% выпускаемой продукции удовлетворяет стандарту. Упрощенный контроль признает пригодной стандартную продукцию с вероятностью 0,98 и нестандартную — с вероятностью 0,05. Какова вероятность того, что изделие, прошедшее упрощенный контроль, удовлетворяет стандарту?

7.28. Прибор состоит из двух узлов, причем для работы прибора необходима исправность каждого узла. Надежность (вероятность безотказной работы в течение времени t) первого узла равна p_1, второго p_2. Прибор испытывался в течение времени t и вышел из строя. Определите вероятность того, что вышел из строя только первый узел, а второй исправен.

7.29. В урне лежат четыре шара, причем все предположения о числе белых шаров в урне одинаково вероятны. Взятый наудачу из урны шар оказался белым. Какова вероятность того, что и следующий шар, вынутый из урны, также окажется белым?

7.30. В урне лежат n шаров, причем все предположения о числе белых шаров, находящихся в урне, одинаково вероятны. Взятый наудачу из урны шар оказался белым. Какова вероятность того, что и следующий шар, извлеченный из урны, также окажется белым?

§ 22. Серии независимых опытов. Формула Я. Бернулли

До сих пор мы рассматривали случайные события, связанные с некоторыми единичными опытами. Однако и для практики, и для самой теории вероятностей гораздо больший интерес представляет изучение серии одинаковых опытов, которые производятся независимо. Примерами серий независимых опытов могут служить

подбрасывание монеты, стрельба по мишени, выбор изделия для контроля в тех случаях, когда все эти опыты делаются многократно и в одинаковых условиях. Задача ставится следующим образом.

Пусть случайное событие A осуществляется в некотором опыте с вероятностью p. Какова вероятность $P_n(k)$ того, что при n-кратном воспроизведении опыта событие A произойдет ровно k раз? Ответ на поставленный вопрос дает формула Я. Бернулли.

Получим сначала формулу Я. Бернулли для частного случая. Пусть $n=4$ и $k=2$, т. е. рассмотрим серию из четырех опытов, в каждом из которых событие A наступает с вероятностью p, и попытаемся определить вероятность $P_4(2)$ того, что в четырех опытах событие A произойдет ровно два раза.

Обозначим через A_1, A_2, A_3 и A_4 события, заключающиеся в том, что событие A произошло соответственно в первом, втором, третьем и четвертом опытах. Тогда событие, состоящее в том, что A произошло ровно два раза, может быть записано как сумма следующих несовместных событий:

$A_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3 \cap \overline{A}_4$ (A произошло в 1-м и 2-м опытах),

$A_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3 \cap \overline{A}_4$ (A произошло в 1-м и 3-м опытах),

$A_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3 \cap A_4$ (A произошло в 1-м и 4-м опытах),

$\overline{A}_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \overline{A}_4$ (A произошло во 2-м и 3-м опытах),

$\overline{A}_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3 \cap A_4$ (A произошло во 2-м и 4-м опытах),

$\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3 \cap A_4$ (A произошло в 3-м и 4-м опытах).

Здесь выписано C_4^2 событий, так как именно столько существует способов двукратного осуществления события A в четырех опытах. Вероятность каждого из этих событий по теореме умножения равна $p^2(1-p)^2$, т. е. одна и та же.

По теореме сложения для несовместных событий получаем

$$P_4(2) = C_4^2 p^2 (1-p)^2.$$

В общем случае формула Я. Бернулли получается совершенно аналогично.

Обозначим через A_i ($i=1, 2, \ldots, n$) событие, заключающееся в том, что событие A происходит в i-м опыте.

Тогда событие, состоящее в том, что A наступило ровно k раз, представляется в виде суммы следующих несовместных событий:

$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k \cap \overline{A}_{k+1} \ldots \cap \overline{A}_n$ (A произошло в первых k опытах),

. . . . . .

$\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \ldots \cap \overline{A}_{n-k} \cap A_{n-k+1} \cap \ldots \cap A_n$ (A произошло в последних k опытах).

Здесь должно быть выписано C_n^k событий, так как именно таково число способов k-кратного осуществления события A в n опытах.

По теореме умножения вероятность каждого из этих событий равна

$$p^k (1-p)^{n-k}.$$

Применяя теорему сложения для несовместных событий, получаем *формулу Я. Бернулли*:

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}. \qquad (1)$$

Пример 1. По мишени производится пять выстрелов, причем вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,8. Какова вероятность того, что мишень будет поражена тремя выстрелами?

По формуле Я. Бернулли, положив $n=5$, $k=3$, $p=0{,}8$, находим

$$P_5(3) = C_5^3 0{,}8^3 \cdot 0{,}2^2 = 0{,}2048 \approx 0{,}2.$$

Пример 2. В приборе 4 лампы. Вероятность выхода из строя в течение года для каждой лампы равна $\frac{1}{6}$. Какова вероятность того, что в течение года придется заменить не менее половины всех ламп?

Применяя формулу Я. Бернулли, находим вероятность того, что в течение года выйдут из строя две лампы: $C_4^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^2$, три лампы: $C_4^3 \left(\frac{1}{6}\right)^3 \frac{5}{6}$, четыре лампы: $C_4^4 \left(\frac{1}{6}\right)^4 \left(\frac{5}{6}\right)^0$.

По теореме сложения для несовместных событий искомая вероятность равна

$$C_4^2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^2+C_4^3\left(\frac{1}{6}\right)^3\frac{5}{6}+C_4^4\left(\frac{1}{6}\right)^4=$$

$$=\frac{150+20+1}{6^4}=\frac{171}{1\,296}=\frac{19}{144}\approx 0{,}13.$$

Положим в формуле Я. Бернулли $1-p=q$ и запишем ее следующим образом:

$$P_n(k)=C_n^k q^{n-k}p^k.$$

Рассмотрим теперь многочлен $(q+px)^n$. Применяя формулу Ньютона, расположим этот многочлен по возрастающим степеням x:

$$(q+px)^n=\sum_{k=0}^{n}(C_n^k q^{n-k}p^k)\,x^k. \qquad (2)$$

Из полученного тождества видно, что вероятности $P_n(k)=C_n^k q^{n-k}p^k$ $(k=0, 1, \ldots, n)$ являются коэффициентами многочлена $(q+px)^n$. В связи с этим многочлен $(q+px)^n$ называют *производящим многочленом* для вероятностей k-кратного осуществления события A в серии из n независимых опытов.

В тех случаях, когда необходимо найти все вероятности $P_n(k)$ $(k=0, 1, \ldots, n)$, удобно выписать производящий многочлен и разложить его по формуле Ньютона. Коэффициенты многочлена дадут искомые вероятности.

Отметим еще, что иногда требуется найти наивероятнейшее число наступлений события A в серии из n независимых опытов. Другими словами, требуется определить такие значения k, при которых величина $C_n^k q^{n-k}p^k$ (при постоянном n) принимает наибольшее значение. Из формулы (2) следует, что эта задача равносильна отысканию наибольшего коэффициента производящего многочлена $(q+px)^n$. В § 19 (см. пример 7) было показано, как находить наибольший коэффициент многочленов такого вида.

Пример 3. Четыре элемента вычислительного устройства работают независимо. Вероятность безотказной работы за время t для каждого элемента равна $\frac{3}{4}$. Найти вероятность того, что в течение времени t:

а) ни один элемент не будет работать безотказно;

б) только один элемент будет работать безотказно;
в) два элемента не откажут;
г) три элемента будут работать исправно;
д) все четыре будут работать исправно.

Здесь опыт заключается в наблюдении за работой одного элемента в течение времени t, событие A — в безотказной работе элемента в течение заданного времени. Событие A имеет вероятность $p=\frac{3}{4}$, противоположное событие $\bar{A}$ происходит с вероятностью $q=\frac{1}{4}$. Устройство содержит четыре элемента, следовательно, опыт производится четыре раза, т. е. $n=4$.

Для решения задачи составим производящий многочлен $\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}x\right)^4$ и напишем для него формулу Ньютона

$$\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}x\right)^4=\left(\frac{1}{4}\right)^4+4\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^3\cdot\frac{3}{4}x+$$
$$+\frac{4\cdot3}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2x^2+4\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^3x^3+\left(\frac{3}{4}\right)^4x^4.$$

Коэффициенты многочлена дают искомые вероятности:

а) вероятность того, что ни один элемент не будет работать безотказно, равна коэффициенту при x^0, т. е.

$$P_4(0)=\left(\frac{1}{4}\right)^4\approx0{,}004;$$

б) вероятность того, что только один элемент будет работать безотказно, равна коэффициенту при x, т. е.

$$P_4(1)=4\left(\frac{1}{4}\right)^3\frac{3}{4}\approx0{,}048;$$

в) вероятность безотказной работы двух элементов равна коэффициенту при x^2, т. е.

$$P_4(2)=\frac{4\cdot3}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^2\approx0{,}212;$$

г) вероятность безотказной работы трех элементов равна коэффициенту при x^3, т. е.

$$P_4(3)=4\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^3\approx0{,}422;$$

д) вероятность того, что все четыре элемента будут работать безотказно, равна коэффициенту при x^4, т. е.

$$P_4(4)=\left(\frac{3}{4}\right)^4\approx 0{,}314.$$

Пример 4. Событие A при однократном осуществлении опыта наступает с вероятностью $\frac{2}{3}$. Опыт производится 10 раз. Какой исход этого эксперимента имеет наибольшую вероятность? Чему она равна?

Производящий многочлен в этом случае имеет вид

$$\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}x\right)^{10}.$$

В примере 7 § 19 было установлено, что наибольшим коэффициентом этого многочлена является коэффициент при x^7, т. е. $C_{10}^7\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^7$. Таким образом, наибольшую вероятность имеет следующий исход эксперимента: событие A произойдет 7 раз. Вероятность такого исхода

$$P_{10}(7)=C_{10}^7\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^7\approx 0{,}26.$$

Каждый из 10 других исходов эксперимента имеет меньшую вероятность.

Упражнения

7.31. Монета подбрасывается 10 раз. Какова вероятность того, что герб появится два раза?

7.32. Вероятность того, что суточный расход газа на предприятии не превысит нормы, равна 0,9. Какова вероятность того, что в течение недели предприятие трижды допустит перерасход газа?

7.33. Монета подбрасывается 5 раз. Какова вероятность того, что герб появится не менее двух раз?

7.34. Если вероятности выигрыша и проигрыша в одной партии одинаковы и равны 0,5, то что более вероятно: а) выиграть три партии из четырех или пять из восьми; б) выиграть не менее трех партий из четырех или не менее пяти партий из восьми?

7.35. Событие A при однократном осуществлении опыта наступает с вероятностью $\frac{2}{3}$. Определите вероятность того, что при пятикратном осуществлении опыта событие A произойдет 5 раз, 4 раза, 3 раза, 2 раза, 1 раз, не произойдет ни разу.

7.36. По мишени производится 100 выстрелов. Каково наивероятнейшее число попаданий, если вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна $\frac{5}{6}$?

7.37. Рабочий обслуживает 50 станков. Вероятность того, что в течение смены станок потребует регулировки, равна $\frac{1}{3}$. Что более вероятно: а) регулировки потребуют 17 станков; б) регулировки потребуют 16 станков?

7.38. В приборе шесть ламп. При повышении напряжения в цепи каждая лампа выходит из строя независимо от других с вероятностью 0,3. При перегорании трех или меньшего числа ламп прибор не выходит из строя. При перегорании четырех ламп прибор выходит из строя с вероятностью 0,3, при перегорании пяти ламп — с вероятностью 0,7, при перегорании шести ламп — с вероятностью 1. Определите вероятность выхода прибора из строя при повышении напряжения.

§ 23. Случайные величины

1. Закон распределения случайной величины. Под *случайной величиной*, связанной с некоторым опытом, понимается всякая величина, которая при осуществлении этого опыта принимает то или иное числовое значение. В предыдущих параграфах мы уже встречались с разнообразными случайными величинами. В опыте с подбрасыванием игральной кости нас интересовало число выпавших очков, т. е. величина, которая в зависимости от случая принимала одно из следующих шести значений: 1, 2, 3, 4, 5, 6. При стрельбе по мишени пятью выстрелами мы также имели дело со случайной величиной (числом попаданий в мишень), которая могла принимать значения 0, 1, 2, 3, 4, 5. Примерами случайных величин могут служить также:

а) количество бракованных изделий в определенной партии,

б) величина надоя молока от одной коровы в течение года,

в) количество солнечных пятен с площадью, большей некоторого определенного значения, зарегистрированных астрономом в течение дня на солнечном диске,

г) число лепестков в цветке сирени,

д) количество дорожно-транспортных происшествий в городе в течение суток.

Для полной характеристики случайной величины необходимо прежде всего знать те значения, которые она может принимать. Но этого, разумеется, недостаточно. Помимо этого нужно знать, с какой вероятностью случайная величина принимает то или иное значение.

Будем обозначать случайную величину буквой X, ее значения буквами

$$x_1, x_2, \ldots, x_n,$$

а соответствующие вероятности, с которыми эти значения принимаются, буквами

$$p_1, p_2, \ldots, p_n.$$

Если для случайной величины X известны все значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$, которые она может принимать, и все вероятности $p_1, p_2, \ldots, p_n$, с которыми эти значения принимаются, то говорят, что задан *закон распределения* случайной величины X или просто *распределение* величины X

Закон распределения удобно записывать в виде следующей таблицы:

x_1	x_2	x_3	$\ldots$	x_k	$\ldots$	x_n
p_1	p_2	p_3	$\ldots$	p_k	$\ldots$	p_n

(1)

В первой строке таблицы записываются все значения случайной величины, а под ними, во второй строке, — соответствующие вероятности.

Рассмотрим n случайных событий:

A_1 — случайная величина X приняла значение x_1,

A_2 — случайная величина X приняла значение x_2,

. . . . . .

A_n — случайная величина X приняла значение x_n.

Очевидно, что сумма событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ является достоверным событием, так как одно из значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ случайная величина обязательно принимает. Поэтому $\mathrm{P}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = 1$.

Кроме того, события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ несовместны, так как случайная величина при однократном осуществлении опыта может принять только одно из значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$. По теореме сложения для несовместных событий получаем

$$\mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(A_2) + \ldots + \mathrm{P}(A_n) = 1,$$

т. е. $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$, или, короче,

$$\sum_{k=1}^{n} p_k = 1. \qquad (2)$$

Следовательно, сумма всех чисел, стоящих во второй строке таблицы (1), дающей закон распределения случайной величины X, должна быть равна единице.

Пример 1. Пусть случайная величина X — число очков, выпавших при подбрасывании игральной кости. Найти закон распределения.

Случайная величина X принимает значения

$$x_1=1,\quad x_2=2,\quad \ldots,\quad x_6=6$$

с вероятностями

$$p_1=p_2=\ldots=p_6=\frac{1}{6}.$$

Поэтому закон распределения задается таблицей

1	2	3	4	5	6
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Пример 2. По мишени производится три выстрела, причем вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,8. Рассматривается случайная величина X — число попаданий в мишень. Найти ее закон распределения.

Случайная величина X может принимать следующие значения:

$$x_1=0,\quad x_2=1,\quad x_3=2,\quad x_4=3.$$

Для определения соответствующих вероятностей проще всего поступить так: составить производящий многочлен $(0{,}2+0{,}8x)^3$ и записать его разложение

$$0{,}2^3+3\cdot 0{,}2^2\cdot 0{,}8x+3\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8^2x^2+0{,}8^3x^3.$$

Как известно (см. § 22), коэффициент при x^k ($k=0$, 1, 2, 3) дает вероятность того, что k выстрелов попадут в цель, т. е. вероятность того, что случайная величина X примет значение, равное k.

Итак,

$$p_1=0{,}2^3=0{,}008,$$
$$p_2=3\cdot 0{,}2^2\cdot 0{,}8=0{,}096,$$
$$p_3=3\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8^2=0{,}384,$$
$$p_4=0{,}8^3=0{,}512.$$

Таким образом, закон распределения случайной величины X имеет вид

0	1	2	3
0,008	0,096	0,384	0,512

Пример 3. Рассматривается случайная величина X — число появлений события A в серии из n независимых опытов, в каждом из которых A наступает с вероятностью p. Найти распределение случайной величины X.

Случайная величина X может, очевидно, принимать одно из следующих значений:

$$0, 1, 2, \ldots, k, \ldots, n.$$

Вероятность события, состоящего в том, что случайная величина X примет значение, равное k, определяется, как мы знаем, формулой Я. Бернулли:

$$\mathrm{P}(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k}, \quad \text{где} \quad q=1-p.$$

Следовательно, распределение случайной величины X может быть записано так:

0	1	...	k	...	n
$C_n^0 p^0 q^n$	$C_n^1 p^1 q^{n-1}$	...	$C_n^k p^k q^{n-k}$	...	$C_n^n p^n q^0$

(3)

Распределение, описываемое таблицей (3), называется *распределением Я. Бернулли* или *биномиальным распределением*. Условие (2) для распределения Я. Бернулли принимает вид

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k}=1. \tag{4}$$

Для доказательства справедливости этого равенства достаточно в тождестве (2) § 22

$$(q+px)^n=\sum_{k=0}^{n} C_n^k q^{n-k} p^k x^k$$

положить $x=1$.

Распределение Я. Бернулли полностью задается двумя параметрами: числом n всех опытов и вероятностью p, с которой событие происходит в каждом отдельном опыте.

2. Математическое ожидание случайной величины. Важной числовой характеристикой случайной величины является ее среднее значение или математическое ожидание.

Определение. *Математическим ожиданием* случайной величины называется число, равное сумме произведений всех значений случайной величины на вероятности этих значений.

Математическое ожидание случайной величины X обозначается через MX. Если случайная величина X принимает значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ соответственно с вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_n$, то согласно определению

$$MX = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k. \qquad (1)$$

Математическое ожидание является важнейшей числовой характеристикой случайной величины. Часто математическое ожидание называют средним значением случайной величины, так как оно указывает некоторое «среднее число», около которого группируются все значения случайной величины.

Пример 1. Найти математическое ожидание числа очков, выпадающих при подбрасывании игральной кости.

Распределение данной случайной величины X найдено в примере 1 предыдущего пункта. По формуле (1) находим

$$MX = \sum_{k=1}^{6} x_k p_k = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{6} k = \frac{1}{6} \cdot \frac{6 \cdot 7}{2} = 3{,}5.$$

Пример 2. Найти математическое ожидание числа появлений события A в серии из n независимых опытов, в каждом из которых A наступает с вероятностью p.

Вероятность того, что случайная величина X примет значение k, равна $C_n^k q^{n-k} p^k$. Следовательно, по формуле (1)

$$MX = \sum_{k=0}^{n} k C_n^k q^{n-k} p^k.$$

Для упрощения полученного выражения воспользуемся тождеством (2) § 22:

$$(q+px)^n=\sum_{k=0}^{n} C_n^k q^{n-k} p^k x^k.$$

Продифференцируем по переменной x обе части этого тождества. Тогда получим

$$n(q+px)^{n-1} p=\sum_{k=0}^{n} kC_n^k q^{n-k} p^k x^{k-1}.$$

Отсюда при $x=1$, учитывая, что $p+q=1$, найдем

$$np=\sum_{k=0}^{n} kC_n^k q^{n-k} p^k.$$

Следовательно,

$$MX=np. \qquad (2)$$

Таким образом, математическое ожидание числа появлений события A в серии из n независимых опытов, в каждом из которых A наступает с вероятностью p, равно произведению числа n всех опытов на вероятность p наступления события в отдельном опыте.

Другими словами, математическое ожидание случайной величины, распределенной по биномиальному закону с параметрами n и p, равно произведению np.

Пример 3. Найти математическое ожидание числа бракованных изделий в партии из 10 000 изделий, если каждое изделие может оказаться бракованным с вероятностью 0,005.

Число бракованных изделий — это случайная величина X, распределенная по биномиальному закону. Поэтому по формуле (2) находим

$$MX=10\,000\cdot 0{,}005=50.$$

3. Дисперсия случайной величины. Другой важной числовой характеристикой случайной величины является ее дисперсия.

Определение. *Дисперсией случайной величины* называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания.

Дисперсия случайной величины X обозначается через DX. Следовательно,

$$DX = M(X - MX)^2.$$

Пусть случайная величина X принимает значения x_1, x_2, ..., x_n соответственно с вероятностями p_1, p_2, ..., p_n. Тогда квадрат отклонения случайной величины X от ее математического ожидания есть случайная величина, которая принимает значения

$$(x_1 - MX)^2,\ (x_2 - MX)^2,\ \ldots,\ (x_k - MX)^2,\ \ldots,\ (x_n - MX)^2$$

соответственно с вероятностями

$$p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_k,\ \ldots,\ p_n.$$

Поэтому математическое ожидание так распределенной случайной величины, т. е. дисперсию X, можно записать следующим образом:

$$DX = \sum_{k=1}^{n} (x_k - MX)^2 p_k. \qquad (1)$$

Дисперсия случайной величины характеризует степень разброса, рассеивание случайной величины относительно ее математического ожидания (среднего значения). Само слово «дисперсия» означает «рассеивание».

Пример 1. Случайные величины X и Y имеют следующие законы распределения:

-1	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

и

-2	2
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Найти DX и DY.

Вычисляем сначала математические ожидания:

$$MX = (-1)\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot\frac{1}{2} = 0, \quad MY = (-2)\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{2} = 0.$$

Теперь, используя формулу (1), находим дисперсии:

$$DX = 1\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot\frac{1}{2} = 1, \quad DY = 4\cdot\frac{1}{2} + 4\cdot\frac{1}{2} = 4.$$

Пример 2. Законы распределения случайных величин X и Y заданы таблицами

-2	-1	1	2
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

и

-2	-1	1	2
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Найти DX и DY.

Вычисляем математические ожидания:

$$MX=(-2)\cdot\frac{1}{6}+(-1)\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{1}{3}+2\cdot\frac{1}{6}=0,$$

$$MY=(-2)\cdot\frac{1}{4}+(-1)\cdot\frac{1}{4}+1\cdot\frac{1}{4}+2\cdot\frac{1}{4}=0.$$

По формуле (1) находим дисперсии:

$$DX=4\cdot\frac{1}{6}+1\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{1}{3}+4\cdot\frac{1}{6}=2,$$

$$DY=4\cdot\frac{1}{4}+1\cdot\frac{1}{4}+1\cdot\frac{1}{4}+4\cdot\frac{1}{4}=2{,}5.$$

Случайные величины X и Y принимают здесь одни и те же значения, имеют одно и то же математическое ожидание, но разброс значений случайной величины Y больший, чем у случайной величины X. Значения ±2, более удаленные от математического ожидания, случайная величина Y принимает с большей вероятностью, чем случайная величина X, а значения ±1, менее удаленные от математического ожидания, Y принимает с меньшей вероятностью, чем X. Именно на это и указывает неравенство $DX<DY$.

В примерах 1 и 2 дисперсии случайных величин вычислялись по формуле (1). Однако, как правило, для вычисления дисперсии оказывается более удобной другая формула. Для того чтобы получить ее, преобразуем прежде всего правую часть формулы (1) следующим образом:

$$DX=\sum_{k=1}^{n}(x_k-MX)^2p_k=\sum_{k=1}^{n}(x_k^2-2(MX)x_k+(MX)^2)p_k=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}x_k^2p_k-2(MX)\sum_{k=1}^{n}x_kp_k+(MX)^2\sum_{k=1}^{n}p_k.$$

Теперь учтем, что

$$\sum_{k=1}^{n} p_k = 1, \quad \text{а} \quad \sum_{k=1}^{n} x_k p_k = MX,$$

и получим

$$DX = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 p_k - (MX)^2.$$

Оставшаяся сумма есть не что иное, как математическое ожидание случайной величины, распределенной по закону:

x_1^2	x_2^2	...	x_k^2	...	x_n^2
p_1	p_2	...	p_k	...	p_n

Такую случайную величину естественно назвать квадратом случайной величины X и обозначить X^2.

Таким образом, для дисперсии справедлива формула

$$DX = M(X^2) - (MX)^2. \qquad (2)$$

Эта формула читается так: дисперсия случайной величины равна математическому ожиданию квадрата этой величины без квадрата ее математического ожидания.

Пример 3. Найти дисперсию случайной величины X, распределенной по биномиальному закону с параметрами n и p.

В примере 2 предыдущего пункта было показано, что $MX = np$. Имея в виду воспользоваться для вычисления дисперсии формулой (2), запишем закон распределения случайной величины X^2:

0	1	...	k^2	...	n^2
$C_n^0 p^0 q^n$	$C_n^1 p^1 q^{n-1}$	...	$C_n^k p^k q^{n-k}$	...	$C_n^n p^n q^0$

Для математического ожидания случайной величины X^2 будем иметь

$$M(X^2) = \sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Для упрощения получившейся суммы вновь обратимся к тождеству (2) § 22:

$$(q+px)^n=\sum_{k=0}^{n} C_n^k q^{n-k}p^k x^k.$$

Продифференцируем дважды по переменной x обе части тождества. Тогда получим.

$$n(n-1)(q+px)^{n-2}p^2=\sum_{k=1}^{n} C_n^k q^{n-k}p^k k(k-1)x^{k-2}.$$

Положив в этом тождестве $x=1$, придем к равенству

$$n(n-1)p^2=\sum_{k=1}^{n} k(k-1)C_n^k q^{n-k}p^k$$

или

$$n(n-1)p^2=\sum_{k=1}^{n} k^2C_n^k q^{n-k}p^k-\sum_{k=1}^{n} kC_n^k q^{n-k}p^k,$$

откуда, учитывая, что $\sum_{k=1}^{n} kC_n^k q^{n-k}p^k=MX=np$, найдем

$$M(X^2)=\sum_{k=1}^{n} k^2C_n^k q^{n-k}p^k=n(n-1)p^2+np=n^2p^2-np^2+np.$$

Теперь окончательно получаем

$$DX=M(X^2)-(MX)^2=n^2p^2-np^2+np-n^2p^2=np(1-p),$$

т. е.

$$DX=npq. \qquad (3)$$

4. Неравенство Чебышева. Рассмотрим абсолютную величину отклонения случайной величины X от ее математического ожидания, т. е. рассмотрим случайную величину $|X-MX|$.

Вероятность того, что случайная величина $|X-MX|$ примет значение, не меньшее некоторого положительного числа ε, будем обозначать через $P(|X-MX|\geqslant\varepsilon)$.

Теорема. *Для произвольной случайной величины X и произвольного положительного числа ε справедливо неравенство*

$$P(|X-MX|\geqslant\varepsilon)\leqslant\frac{DX}{\varepsilon^2},$$

т. е. вероятность того, что отклонение случайной величины X от ее математического ожидания по абсолютной величине будет не меньше произвольного положительного числа ε, не превосходит дисперсии X, деленной на ε^2.

Это и есть знаменитое неравенство Чебышева, с помощью которого в теории вероятностей доказываются многие важные теоремы

Доказательство. Пусть случайная величина X распределена по закону

x_1	...	x_l	x_{l+1}	...	x_n
p_1	...	p_l	p_{l+1}	...	p_n

Возьмем произвольное положительное число ε Тогда все значения x_k $(k=1, 2, .., n)$ случайной величины X можно разбить на два множества: к первому множеству отнесем те значения x_k, для которых выполняется неравенство

$$|x_k - MX| \geqslant \varepsilon; \qquad (1)$$

остальные значения, т. е. те, для которых справедливо противоположное неравенство

$$|x_k - MX| < \varepsilon, \qquad (2)$$

отнесем ко второму множеству. Заметим, что не исключается, что одно из этих множеств окажется пустым.

Не ограничивая общности, можно считать, что мы так занумеровали значения случайной величины, что те значения, которые удовлетворяют неравенству (1), получили номера от 1 до l, а остальные значения — номера от $l+1$ до n.

Рассмотрим теперь дисперсию случайной величины X:

$$DX = \sum_{k=1}^{n} (x_k - MX)^2 p_k.$$

Так как все слагаемые этой суммы неотрицательны, то, отбросив последние $n-l$ слагаемых, мы можем только уменьшить сумму, и поэтому

$$DX \geqslant \sum_{k=1}^{l} (x_k - MX)^2 p_k.$$

Но теперь под знаком суммы остались только значения x_k, для которых имеет место неравенство

$$|x_k - MX| \geqslant \varepsilon.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{l} (x_k - MX)^2 p_k \geqslant \sum_{k=1}^{l} \varepsilon^2 p_k = \varepsilon^2 \sum_{k=1}^{l} p_k.$$

Последняя сумма $\sum_{k=1}^{l} p_k$ есть вероятность того, что случайная величина X примет одно из значений $x_1, x_2, \ldots, x_l$, и поэтому $\sum_{k=1}^{l} p_k$ есть вероятность того, что $|x_k - MX| \geqslant \varepsilon$, т. е.

$$\sum_{k=1}^{l} p_k = P(|X - MX| \geqslant \varepsilon).$$

Таким образом, для дисперсии получена оценка

$$DX \geqslant \varepsilon^2 P(|X - MX| \geqslant \varepsilon),$$

из которой следует неравенство Чебышева.

5. Закон больших чисел. Пусть случайная величина X есть число наступлений события A в серии из n независимых опытов, в каждом из которых A наступает с вероятностью p. Случайная величина X принимает значения k ($k = 0, 1, \ldots, n$). Ранее (см. пункты 2 и 3) уже были вычислены математическое ожидание и дисперсия X:

$$MX = np, \quad DX = npq.$$

Зададимся произвольным положительным числом ε_1 и запишем для случайной величины X неравенство Чебышева:

$$P(|k - np| \geqslant \varepsilon_1) \leqslant \frac{npq}{\varepsilon_1^2}.$$

Заметим, что поскольку неравенство

$$|k - np| \geqslant \varepsilon_1,$$

очевидно, равносильно неравенству

$$\left| \frac{k}{n} - p \right| \geqslant \frac{\varepsilon_1}{n},$$

то

$$P\left(\left|\frac{k}{n}-p\right|\geqslant\frac{\varepsilon_1}{n}\right)\leqslant\frac{npq}{\varepsilon_1^2}.$$

Так как ε_1 — произвольное положительное число, то $\frac{\varepsilon_1}{n}$ — также произвольное положительное число. Положив $\frac{\varepsilon_1}{n}=\varepsilon$, получим следующую оценку для вероятности того, что частота $\frac{k}{n}$ наступления события A в серии из n опытов отклоняется по абсолютной величине от вероятности p наступления A в отдельном опыте не меньше чем на произвольное положительное число ε:

$$P\left(\left|\frac{k}{n}-p\right|\geqslant\varepsilon\right)\leqslant\frac{pq}{n\varepsilon^2}.$$

Из полученной оценки, ввиду того, что $\frac{pq}{n\varepsilon^2}\to 0$ при $n\to\infty$, сразу следует, что

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{k}{n}-p\right|\geqslant\varepsilon\right)=0.$$

Этот результат впервые был получен Я. Бернулли и называется *теоремой Я. Бернулли* или *законом больших чисел* в форме Я. Бернулли.

Закон больших чисел утверждает: для любого положительного числа ε вероятность того, что частота наступлений события A в серии из n опытов отклоняется от вероятности p, с которой A происходит в отдельном опыте, не меньше чем на ε, с ростом n стремится к нулю.

Другими словами, как бы мало ни было ε, при достаточно большом n вероятность неравенства

$$\left|\frac{k}{n}-p\right|\geqslant\varepsilon$$

сколь угодно близка к нулю и, следовательно, вероятность противоположного неравенства

$$\left|\frac{k}{n}-p\right|<\varepsilon$$

сколь угодно близка к единице.

Итак, с вероятностью, сколь угодно близкой к единице, можно утверждать, что при достаточно большом числе независимых опытов частота появления события

как угодно мало отличается от его вероятности в отдельном опыте.

Из закона больших чисел в форме Я. Бернулли вытекает, таким образом, статистическая устойчивость частоты появления события в серии из n независимых опытов, в каждом из которых событие происходит с одной и той же вероятностью. В случаях, когда вероятность события неизвестна, закон больших чисел позволяет принять за вероятность события его частоту, вычисленную при достаточно большом числе опытов. Например, в связи с тем, что частота рождений мальчиков при достаточно большом числе наблюдений за рождаемостью оказывается близкой к числу 0,511, именно это число принимается за вероятность рождения мальчика. Знание этой вероятности позволяет делать серьезные демографические прогнозы.

Упражнения

7.39. Может ли распределение какой-либо случайной величины задаваться таблицей:

а)

0	$\frac{1}{2}$	10	π
0,1	0,5	0,1	0,3

?

б)

1	2	3	4
0	0,4	0,2	0,3

?

7.40. Является ли закон распределения случайных величин, рассмотренных в примерах 1 и 2 п. 1, биномиальным?

7.41. Монета подбрасывается три раза. Рассматривается случайная величина X — число появлений герба. Найдите распределение случайной величины X.

7.42. Случайная величина X — квадрат числа очков, появившихся при подбрасывании игральной кости. Найдите закон распределения.

7.43. Производится три независимых опыта, в каждом из которых событие A появляется с вероятностью 0,4. Рассматривается случайная величина X — частота появления события A в трех опытах. Найдите закон распределения случайной величины X.

7.44. Случайная величина X имеет следующий закон распределения:

1	2	3
0,3	0,2	0,5

Найдите MX и DX.

7.45. Случайная величина X распределена по закону

2	4	6	8	10
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$

Найдите MX и DX.

7.46. Найдите MX и DX для случайной величины, рассмотренной:
а) в упражнении 7.41;
б) в упражнении 7.43.

7.47. Найдите MX для случайной велнчины X, рассмотренной в упражнении 7.42.

7.48. Из урны, содержащей 2 белых и 3 черных шара, наугад вынимаются два шара. Найдите MX и DX, если X — число вынутых белых шаров.

7.49. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа бракованных изделий в партии из 5000 изделий, если каждое изделие может оказаться бракованным с вероятностью 0,02.

7.50. Из всей выпускаемой заводом продукции 98% составляют изделия со знаком качества. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа изделий со знаком качества в партии из 5000 изделий.

7.51. Имеются 4 лампы, каждая из которых с вероятностью $\frac{1}{3}$ имеет дефект. При ввинчивании в патрон дефектная лампа сразу перегорает, и тогда ввинчивается следующая. Рассмотрите случайную величину X — число ввинченных ламп. Найдите закон распределения, математическое ожидание и дисперсию случайной величины X.

7.52. При бросании трех костей игрок выигрывает 10 рублей, если на всех костях выпадет шесть очков. В случае выпадения шести очков только на двух костях игрок получает рубль. Сколько должен стоить билет, дающий право на участие в такой игре, чтобы игра была выгодной?

7.53. Мишень в тире представляет собой круг, разделенный на три конгруэнтных сектора, занумерованных цифрами 1, 2, 3. Во время выстрела мишень вращается, так что стрелок не различает секторов и стреляет наугад. При попадании в сектор 1 стрелок выигрывает рубль, в сектор 2 — два рубля, в сектор 3 — три рубля. Стоимость билета, дающего право на один выстрел, — полтора рубля. Выгодна ил такая игра тому, кто попадает в мишень с вероятностью: а) 0,7; б) 0,8; в) 0,75?

Глава VIII

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 24. Примеры дифференциальных уравнений

1. Размножение бактерий. На опытах с бактериями установлено, что скорость размножения бактерий пропорциональна их количеству, если, конечно, для них имеется достаточный запас пищи.

Так как сами бактерии очень малы, а их количество велико, то можно считать, что масса бактерий с течением времени меняется непрерывно. Тогда скоростью прироста массы бактерий называется скоростью размножения.

Если через $x(t)$ обозначить массу всех бактерий в момент времени t, то $\frac{dx}{dt}$ будет скоростью размножения этих бактерий. Так как скорость размножения $\frac{dx}{dt}$ пропорциональна количеству бактерий, то существует постоянная k такая, что

$$\frac{dx}{dt} = kx. \qquad (1)$$

По условию $x(t)$ и $x'(t)$ — неотрицательные, поэтому коэффициент k тоже неотрицательный. Очевидно, что интересным является лишь случай $k > 0$, так как при $k = 0$ никакого размножения не происходит.

Уравнение (1) является простейшим примером *дифференциального уравнения*. Оно называется дифференциальным уравнением размножения. Искомым неизвестным уравнения (1) является функция $x = x(t)$, которая в уравнение входит вместе со своей производной $x'(t)$.

Легко проверить, что любая функция вида

$$x = Ce^{kt}, \qquad (2)$$

где C — некоторая постоянная, является решением урав-

нения (1). Действительно,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(Ce^{kt}) = C\frac{d}{dt}e^{kt} = Cke^{kt} = k(Ce^{kt}) = kx.$$

В § 26 будет доказано, что все решения уравнения (1) задаются формулой (2). Поэтому функция (2), где C — произвольная постоянная, называется *общим решением уравнения* (1).

Сделаем несколько замечаний о том, как используются дифференциальное уравнение (1) и его общее решение (2) при исследовании процесса размножения.

Очевидно, что коэффициент k зависит от вида бактерий и от внешних условий.

Если мы знаем значение коэффициента k и массу m_0 бактерий в некоторый момент времени t_0, то по формуле (2) получим массу бактерий в любой момент времени t. Действительно, пусть

$$x(t_0) = m_0. \tag{3}$$

Тогда

$$m_0 = Ce^{kt_0}, \quad C = m_0e^{-kt_0},$$

и, следовательно,

$$x(t) = m_0e^{k(t-t_0)}. \tag{4}$$

Функция (4) является решением уравнения (1) и, кроме того, удовлетворяет условию (3).

Условие (3) называется *начальным условием*.

Таким образом, уравнение (1) имеет бесчисленное множество решений, а задание начального условия выделяет единственное решение из этого множества.

На практике часто возникает следующая ситуация. Известно, что размножение некоторого вида бактерий при данных условиях идет по закону $x = x(t)$, удовлетворяющему уравнению вида (1), но неизвестно значение коэффициента k. Требуется определить коэффициент k и найти закон размножения данного вида бактерий при данных условиях.

В этом случае общее решение (2) уравнения (1) содержит две неизвестные постоянные C и k.

Как и выше, из начального условия (3) найдем постоянную C и получим

$$x(t) = m_0e^{k(t-t_0)}. \tag{5}$$

Для нахождения неизвестного k подсчитаем массу бактерий в некоторый момент времени $t_1 > t_0$; пусть эта масса равна m_1. Тогда

$$m_1 = m_0 e^{k(t_1 - t_0)}, \quad k(t_1 - t_0) = \ln \frac{m_1}{m_0}$$

и, следовательно,

$$k = \frac{1}{t_1 - t_0} \ln \frac{m_1}{m_0} = \frac{\ln m_1 - \ln m_0}{t_1 - t_0}$$

Подставив найденное значение коэффициента k в формулу (5), получим

$$x(t) = m_0 e^{\frac{t - t_0}{t_1 - t_0} \ln \frac{m_1}{m_0}},$$

или

$$x(t) = m_0 \left(\frac{m_1}{m_0}\right)^{\frac{t - t_0}{t_1 - t_0}}.$$

2. Радиоактивный распад. Из эксперимента известно, что скорость распада радиоактивного вещества пропорциональна имеющемуся количеству вещества.

Таким образом, если через $x(t)$ обозначить массу вещества, еще не распавшегося к моменту времени t, то скорость распада $\frac{dx}{dt}$ удовлетворяет следующему уравнению:

$$\frac{dx}{dt} = -kx(t), \tag{1}$$

где k — некоторая положительная постоянная.

В уравнении (1) перед k поставлен знак минус, так как $x(t) > 0$, а $\frac{dx}{dt} < 0$.

Уравнение (1) называется *дифференциальным уравнением радиоактивного распада.*

Можно показать (см. § 26), что любая функция вида

$$x = Ce^{-kt}, \tag{2}$$

где C — некоторая постоянная, является решением уравнения (1) и других решений это уравнение не имеет. Другими словами, формула (2), где C — произвольная постоянная, задает общее решение уравнения (1).

Коэффициент k определяется лишь видом радиоактивного вещества. Постоянная C может быть найдена из

начального условия в некоторый момент времени t_0. Действительно, пусть

$$x(t_0) = m_0. \tag{3}$$

Тогда из формулы (2) при $t = t_0$ получаем

$$C = m_0 e^{kt_0}.$$

Следовательно, решение

$$x = m_0 e^{-k(t-t_0)} \tag{4}$$

будет удовлетворять начальному условию (3).

На практике скорость распада радиоактивного вещества характеризуется так называемым *периодом полураспада*, т. е. временем, за которое распадается половина имеющегося вещества. Обозначим период полураспада через T и выразим k через T.

Из (4) при $t = t_0 + T$ имеем

$$\frac{m_0}{2} = m_0 e^{-kT},$$

и поэтому

$$kT = \ln 2, \quad k = \frac{\ln 2}{T}.$$

Таким образом,

$$x = m_0 e^{-\frac{t-t_0}{T} \ln 2},$$

или

$$x = m_0 2^{-\frac{t-t_0}{T}}.$$

В частности, если $t_0 = 0$, то

$$x = m_0 2^{-\frac{t}{T}}.$$

3. Общие замечания об уравнениях образования и распада вещества. Многие процессы образования или распада вещества (см. предыдущие пункты) удовлетворяют следующему условию: скорость изменения количества вещества пропорциональна некоторой функции от имеющегося количества вещества в рассматриваемый момент времени.

Пусть $x(t)$ — количество вещества в момент времени t. Тогда для рассматриваемого процесса справедливо уравнение

$$x' = kf(x),$$

где f — некоторая функция от x, характеризующая данный процесс, а k — коэффициент пропорциональности. Коэффициент k может быть постоянным, т. е. не зависеть от времени t, а может и зависеть от t. Например, в уравнении размножения бактерий коэффициент k не будет постоянным, если условия (температура, освещение и т. д.), при которых происходит размножение, меняются во время эксперимента.

Таким образом, в общем случае имеем уравнение

$$x' = k(t)f(x).$$

Такие дифференциальные уравнения будут изучаться в § 26.

4. Дифференциальное уравнение кривой, которая в каждой своей точке имеет заданную касательную. Пусть G — некоторое множество точек M плоскости, на которой введена прямоугольная система координат, и пусть x, y — координаты точки M. Так как между точками плоскости и парами чисел $(x; y)$ имеется взаимно однозначное соответствие, то говорят, что G — множество точек $(x; y)$.

Соответствие f, которое каждой точке $(x; y)$ из множества G ставит в соответствие некоторое действительное число $f(x; y)$, называется *функцией точки* $(x; y)$ или *функцией двух переменных* x, y, определенной на множестве G, и обозначается $f\colon G \to R$ или $f(x; y)$, $(x; y) \in G$.

Рассмотрим теперь следующую задачу.

Найти уравнение кривой, которая в каждой своей точке имеет касательную с заданным угловым коэффициентом $f(x; y)$.

Другими словами, надо найти функцию $y = \varphi(x)$, которая удовлетворяет уравнению

$$y' = f(x; y), \qquad (1)$$

где y' — производная по x от искомой функции. Это уравнение называется *дифференциальным уравнением*, функция $\varphi(x)$ — его решением, а кривая, заданная уравнением $y = \varphi(x)$, — *интегральной кривой*.

Рассмотрим один частный случай.

Пусть функция f зависит только от x и определена на некотором интервале $]a; b[$. Уравнение

$$y' = f(x) \tag{2}$$

решается в теории неопределенных интегралов. Было показано, что все решения этого уравнения задаются формулой

$$y = \int f(x)\,dx.$$

Эта формула содержит неявно произвольную постоянную C. Действительно, если $F(x)$ — некоторая первообразная функции $f(x)$, то

$$y = F(x) + C. \tag{3}$$

Таким образом, уравнение (2) имеет бесчисленное множество решений. Любая кривая, заданная уравнением (3) при фиксированном C, является решением поставленной задачи.

Из теории определенных интегралов известно, что у любой непрерывной функции $f(x)$ имеется первообразная и этой первообразной является интеграл с переменным верхним пределом. Следовательно,

$$y = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt + C.$$

Кривая, заданная этим уравнением, проходит через точку с координатами x_0, C. Следовательно, через каждую точку $(x_0; y_0)$, где $x_0 \in]a; b[$, проходит единственная интегральная кривая

$$y = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt + y_0.$$

Упражнения

8.1. Известно, что за 1 час масса бактерий удваивается и что скорость размножения бактерий прямо пропорциональна наличному количеству бактерий. Для данного вида бактерий напишите дифференциальное уравнение размножения и найдите его общее решение.

8.2. Известно, что за 1 час масса радиоактивного вещества уменьшается на 1%. Напишите дифференциальное уравнение распада и найдите его общее решение.

8.3. Найдите период полураспада радиоактивного вещества, описанного в предыдущем упражнении.

8.4. В баке находится 100 л раствора, содержащего 10 кг соли. В бак со скоростью 3 л в минуту подается вода, и одновременно со

скоростью 2 л в минуту раствор выливается из бака, причем концентрация раствора остается все время равномерной благодаря перемешиванию. Сколько соли в баке останется через час?

8.5. Некоторое вещество преобразуется в другое со скоростью, пропорциональной количеству еще не преобразовавшегося вещества. Через час после начала процесса оставалось 31,4 г вещества, через 3 часа—9,7 г. Сколько вещества было в начале процесса?

8.6. Найдите уравнение кривой, проходящей через точку M (0; 4), если угловой коэффициент касательной в каждой точке кривой равен ординате этой точки.

8.7. Замедляющее действие трения на диск, вращающийся в жидкости, пропорционально угловой скорости (коэффициент пропорциональности равен k). В начальный момент времени $t=0$ угловая скорость была равна ω_0. Определите угловую скорость в произвольный момент времени $t>0$.

8.8. Согласно закону Ньютона скорость охлаждения тела в воздухе пропорциональна разности между температурой тела и температурой воздуха. За 20 минут при температуре воздуха 20 °С тело охладилось от 100 °С до 60 °С. Определите зависимость температуры тела от времени. Через сколько минут температура тела понизится до 30 °С?

§ 25. Основные понятия и определения теории дифференциальных уравнений первого порядка

Уравнения, в которых неизвестными являются функции и в которые входят не только сами функции, но и их производные, называются *дифференциальными уравнениями*.

Если в уравнение входят независимая переменная, неизвестная функция и ее первая производная, то это уравнение называется *дифференциальным уравнением первого порядка*. Если, кроме того, в уравнение входит производная второго порядка от искомой функции, то уравнение называется *дифференциальным уравнением второго порядка*. Аналогично определяются дифференциальные уравнения третьего порядка, четвертого порядка и т. д. Вообще, *порядком дифференциального уравнения* называется порядок старшей производной (искомой функции), входящей в это уравнение.

Во многих примерах (см. предыдущий параграф) искомые функции являются функциями времени t. В этом случае искомые функции обозначаются через $x=x(t)$, $y=y(t)$ и т. п. В общем случае независимая переменная, как и обычно, будет обозначаться через x, а искомые функции — через $y=y(x)$, $z=z(x)$ и т. п. Возможны и другие обозначения.

В общем случае дифференциальное уравнение первого порядка можно записать в следующем виде:

$$F(x; y; y') = 0, \tag{1}$$

где $y = y(x)$ — искомая неизвестная функция, $y' = y'(x)$ — ее производная по x, а F — заданная функция переменных x, y, y'.

Дифференциальные уравнения, рассмотренные в предыдущем параграфе, имеют вид

$$y' = f(x; y). \tag{2}$$

Такие уравнения называются *разрешенными относительно производной*.

Функция $\varphi(x)$, $x \in]a; b[$, называется *решением дифференциального уравнения* (2), если она имеет производную $\varphi'(x)$ *на* $]a; b[$ и если для любого $x \in]a; b[$ справедливо равенство

$$\varphi'(x) = f(x; \varphi(x)).$$

Другими словами, функция $\varphi(x)$, $x \in]a; b[$, называется решением дифференциального уравнения (2), если уравнение (2) при подстановке ее вместо y обращается в тождество по x на интервале $]a; b[$.

Аналогично определяется решение дифференциального уравнения (1).

В дальнейшем рассматриваются лишь уравнения, разрешенные относительно производной, т. е. уравнения вида (2), или уравнения, которые приводятся к уравнениям вида (2).

Задание уравнения вида (2) равносильно заданию функции $f(x; y)$ переменных x, y. Геометрически функция f переменных x, y — это функция, определенная на некотором множестве G точек плоскости с координатами x, y.

Любая кривая, заданная уравнением $y = \varphi(x)$, $x \in]a; b[$, где $\varphi(x)$ — некоторое решение уравнения (2), называется *интегральной кривой* дифференциального уравнения (2).

Из этого определения следует, что интегральная кривая уравнения (2) полностью лежит в области G, в которой определена функция f, и что интегральная кривая в каждой своей точке $M(x; y)$ имеет касательную, угловой коэффициент которой равен значению функции f в этой точке M.

Задача нахождения решения уравнения (2), удовлетворяющего условию

$$y(x_0) = y_0, \tag{3}$$

где x_0, y_0 — заданные числа, называется *задачей Коши*. Условие (3) называется *начальным условием*. Решение уравнения (2), удовлетворяющее начальному условию (3), называется *решением задачи Коши* (2), (3).

Решение задачи Коши имеет простой геометрический смысл. Действительно, согласно данным определениям, решить задачу Коши (2), (3) означает найти интегральную кривую уравнения (2), которая проходит через заданную точку $M_0(x_0; y_0)$.

Отметим без доказательства, что если функция $f(x; y)$ удовлетворяет некоторым достаточно общим условиям, то через каждую точку области G, в которой определена функция f, проходит единственная интегральная кривая уравнения (2). Таким образом, это дифференциальное уравнение имеет бесчисленное множество решений.

Рассмотренные примеры показывают, что множество всех (или почти всех) решений дифференциального уравнения задается формулой

$$y = \varphi(x; C), \tag{4}$$

где C — произвольная постоянная.

Функция (4), которая при каждом фиксированном значении C как функция от x является решением уравнения (2), называется *общим решением уравнения* (2).

Каждое решение уравнения (2), которое получается из общего решения (4) при конкретном значении постоянной C, называется *частным решением*. Постоянная C называется *постоянной интегрирования*.

Сделаем последнее замечание относительно уравнений вида (2).

Умножив обе части уравнения (2) на дифференциал независимой переменной dx, получим уравнение, содержащее дифференциалы:

$$dy = f(x; y)\,dx. \tag{5}$$

Уравнение (5) также называется дифференциальным уравнением первого порядка. Из определения дифференциала следует, что уравнение (5) равносильно уравнению (2).

Упражнения

8.9. Являются ли следующие функции:

а) $y=\sin x-1$;

б) $y=e^{-\sin x}$;

в) $y=\sin x$

решениями уравнения

$$y'+y\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x?$$

8.10. Являются ли функции:

а) $y=\sqrt{1-x^2}$;

б) $y=-\sqrt{1-x^2}$;

в) $y=\sqrt{C-x^2}$ (C — произвольная положительная постоянная)

решениями уравнения

$$x\,dx+y\,dy=0?$$

8.11. Найдите значения α, при которых заданная функция является решением уравнения:

а) $y=e^{\alpha x}+\frac{1}{3}e^x$, $y'+2y=e^x$;

б) $y=(x^2-x)^\alpha$, $y'=\frac{x^2+y^2}{2xy}$;

в) $y=x^\alpha$, $x^2y''+2xy'-6y=0$.

8.12. При каких значениях A и α функция $y=A\cos\alpha x$ будет решением уравнения $y'=y\operatorname{tg}x$?

§ 26. Уравнения с разделяющимися переменными

1. Определения и примеры. Дифференциальные уравнения вида

$$y'=f(x)g(y), \tag{1}$$

где $f(x)$ и $g(y)$ — заданные функции, называются *уравнениями с разделяющимися переменными*.

Очевидно, что если число a является решением уравнения $g(y)=0$, то функция $y=a$ (постоянная) является решением уравнения (1).

Для тех y, для которых $g(y)\neq 0$, уравнение (1) равносильно уравнению

$$p(y)y'=f(x), \tag{2}$$

где $p(y)=\frac{1}{g(y)}$. В этом уравнении переменная y присутствует лишь в левой части, а переменная x — лишь в пра-

вой части. Поэтому вместо слов «перейдем от уравнения (1) к уравнению (2)» часто говорят «в уравнении (1) разделим переменные».

В дифференциалах уравнение (2) имеет вид

$$p(y)\,dy = f(x)\,dx. \tag{3}$$

Здесь слева стоит дифференциал некоторой функции $P(y)$, зависящей от y, а справа — дифференциал функции $F(x)$, зависящей от x.

Проинтегрировав обе части уравнения (2) по x, получим

$$P(y) = F(x) + C, \tag{4}$$

где C — произвольная постоянная. Следовательно, если дифференцируемая функция $y = \varphi(x)$, $x \in]a; b[$, является решением уравнения (2), то она является решением уравнения (4) при некотором значении постоянной C, т. е.

$$P(\varphi(x)) = F(x) + C \tag{5}$$

для любого $x \in]a; b[$. И наоборот, если дифференцируемая функция $y = \varphi(x)$, $x \in]a; b[$, является решением уравнения (4), то она является решением дифференциального уравнения (2). Действительно, дифференцируя по x обе части равенства (5), получаем

$$p(\varphi(x))\,\varphi'(x) = f(x),$$

а это и означает, что функция $\varphi(x)$ удовлетворяет уравнению (2).

Таким образом, любое решение дифференциального уравнения (2) получается из формулы (4). В этом случае будем говорить, что формула (4) *задает общее решение уравнения* (2).

Все решения уравнения (2) являются и решениями уравнения (1); других решений в области, где $g(y) \neq 0$, уравнение (1) не имеет. Если функция $g(y)$ обращается в нуль, то уравнение (1) имеет, кроме того, решения вида $y = a$, где число a таково, что $g(a) = 0$.

Пример 1. Найти все решения уравнения

$$y' = 1 + y^2. \tag{6}$$

Решение. Уравнение (6) является уравнением с разделяющимися переменными. Обе части уравнения (6)

разделим на $1+y^2$ и проинтегрируем по x обе части полученного уравнения

$$\frac{y'}{1+y^2}=1. \qquad (7)$$

Так как левая часть уравнения (7) является производной по x от функции $\operatorname{arctg} y$, где $y=y(x)$, то после интегрирования получим

$$\operatorname{arctg} y=x+C,$$

где C — произвольная постоянная. Отсюда следует, что

$$y=\operatorname{tg}(x+C).$$

Это и есть общее решение уравнения (6). Других решений уравнение (6) не имеет. Схема расположения соответствующих интегральных кривых изображена на рис. 42. Все они получаются из кривой $y=\operatorname{tg} x$ сдвигом влево или вправо по оси Ox.

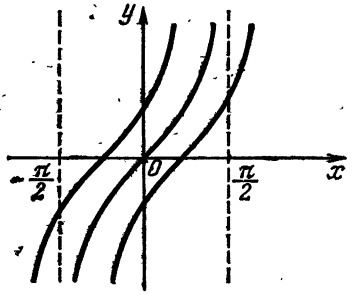


Рис. 42.

Пример 2. Найти все решения уравнения

$$y'=2\sqrt{y}. \qquad (8)$$

Решение. Уравнение (8) является уравнением с разделяющимися переменными. Очевидно, что функция $y=0$ является его решением.

Пусть теперь $y>0$. В дифференциалах уравнение (8) имеет вид

$$dy=2\sqrt{y}\,dx.$$

Разделив переменные в этом уравнении,

$$\frac{dy}{2\sqrt{y}}=dx,$$

и проинтегрировав, получим

$$\sqrt{y}=x+C,$$

где C — произвольная постоянная. Отсюда следует, что $y=(x+C)^2$, причем $x+C\geqslant 0$.

Таким образом, при каждом фиксированном значении постоянной C функция

$$y=(x+C)^2, \quad x \geqslant -C,$$

является решением уравнения (8). Других решений это уравнение в полуплоскости $y>0$ не имеет.

Схема расположения интегральных кривых уравнения (8) изображена на рис. 43. В полуплоскости $y>0$ каждая интегральная кривая получается из ветви параболы

$$y=x^2, \quad x>0,$$

сдвигом влево или вправо по оси Ox. Прямая Ox также является интегральной кривой.

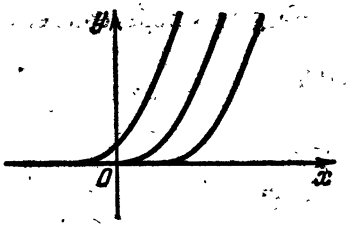


Рис. 43.

2. Правило нахождения общего решения. Для нахождения общего решения дифференциального уравнения с разделяющимися переменными следует:

1) разделить переменные, т. е. преобразовать данное уравнение к виду

$$p(y)\,dy=f(x)\,dx; \qquad (1)$$

2) проинтегрировать обе части полученного уравнения по y и x соответственно, т. е. найти некоторую первообразную $P(y)$ функции $p(y)$ и некоторую первообразную $F(x)$ функции $f(x)$;

3) написать уравнение

$$P(y)=F(x)+C, \qquad (2)$$

где C — произвольная постоянная.

Решив уравнение (2) относительно y, получим общее решение дифференциального уравнения (1):

$$y=\varphi(x;\ C),$$

которое называется также *общим решением данного уравнения.*

Заметим, что данное уравнение может иметь и другие решения. Например, уравнение

$$y'=f(x)\,g(y), \qquad (3)$$

у которого $g(y)$ обращается в нуль в точке y_0, имеет решение $y=y_0$. Это решение может не входить в общее

решение, т. е. оно не получается из общего решения ни при каком значении постоянной C. Поэтому, чтобы указать все решения уравнения (3), надо найти еще все решения уравнения $g(y)=0$.

Пример 1. Решить уравнение

$$y'=xy. \tag{4}$$

Решение. Это уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Разделив переменные:

$$\frac{dy}{y}=x\,dx,$$

и проинтегрировав, получим

$$\ln|y|=\frac{1}{2}x^2+C_1,$$

где C_1 — произвольная постоянная. Отсюда следует, что

$$|y|=e^{C_1}\cdot e^{\frac{1}{2}x^2},$$

или

$$y=Ce^{\frac{1}{2}x^2}, \tag{5}$$

где $C=\pm e^{C_1}$.

Правая часть уравнения (4) обращается в нуль при $y=0$, поэтому оно имеет решение $y=0$. Это решение получается из (5) при $C=0$. Таким образом, формула (5), где C — произвольная постоянная, задает все решения уравнения (4).

Пример 2. Найти все решения дифференциального уравнения

$$y'=xy^2.$$

Решение. Очевидно, что $y=0$ является решением данного уравнения. Пусть теперь $y\neq 0$. Тогда

$$\frac{dy}{y^2}=x\,dx$$

и, следовательно,

$$-\frac{1}{y}=\frac{1}{2}x^2+C.$$

Таким образом, общее решение данного уравнения имеет вид

$$y=-\frac{2}{x^2+C},$$

где C — произвольная постоянная. Заметим, что решение $y=0$ не получается из общего решения ни при каком значении постоянной C.

Пример 3. Решить дифференциальное уравнение

$$y'=-\frac{x}{y}.$$

Решение. Разделив переменные:

$$y\,dy=-x\,dx,$$

и проинтегрировав, получим

$$y^2+x^2=C.$$

Очевидно, что здесь $C>0$. Положим $C=R^2$.

Полученное уравнение является уравнением окружности радиуса R с центром в точке (0; 0). Оно при каждом фиксированном $R>0$ определяет две дифференцируемые функции

$$y=\pm\sqrt{R^2-x^2},$$

$$x\in\,]-R;\ R[,$$

которые и являются решениями данного уравнения. Других решений это уравнение не имеет.

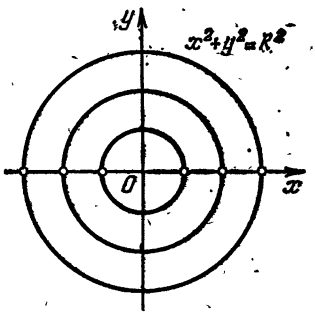


Рис. 44.

Интегральными кривыми данного уравнения являются полуокружности, расположенные в нижней и верхней открытых полуплоскостях (рис. 44).

Замечание. Уравнение, рассмотренное в примере 3, в дифференциалах имеет вид

$$y\,dx+x\,dx=0.$$

В такой записи переменные x и y являются равноправными: можно считать y функцией от x, а можно и наоборот. Поэтому иногда говорят, что интегральными кри-

выми этого уравнения являются окружности с центром в начале координат.

Пример 4. Решить уравнение

$$y' = \frac{xy\cos x}{1+y}. \tag{6}$$

Решение. Очевидно, что постоянная функция $y=0$ является решением.

Пусть теперь $y \neq 0$. Разделим переменные:

$$\left(1+\frac{1}{y}\right) dy = x\cos x\, dx.$$

Проинтегрировав левую часть этого уравнения по y, а правую по x, получим уравнение

$$y + \ln|y| = x\sin x + \cos x + C, \tag{7}$$

где C — произвольная постоянная.

Чтобы найти общее решение уравнения (6), нужно решить уравнение (7) относительно y. К сожалению, это сделать невозможно, так как решения не выражаются через элементарные функции. Однако задача нахождения общего решения дифференциального уравнения сведена к решению уравнения, не содержащего производных. В этом случае будем говорить, что общее решение уравнения (6) определяется формулой (7). Кривые, координаты точек которых удовлетворяют уравнению (7), при некотором значении постоянной C будут интегральными кривыми уравнения (6). Прямая $y=0$ также будет интегральной кривой уравнения (6).

Упражнения

8.13. Решите уравнения:

а) $y' = x + \sin x$;

б) $y' = e^{-y} - 1$;

в) $y' = \dfrac{y+1}{x-1}$;

г) $\sqrt{1-x^2}\, y' + xy = 0$;

д) $(\sin x)\, y' = y \ln y$;

е) $y' = e^{x+y}$;

ж) $y \sin x\, dx + \cos x\, dy = 0$;

з) $e^y (1+x^2)\, dy - 2x\,(1+e^y)\, dx = 0$;

и) $(1+x)\, dy = 2y\, dx$;

к) $xy\, dx + (x+1)\, dy = 0$;

л) $(1+y^2)\, dx - x\, dy = 0$.

8.14. Найдите все решения уравнений:

а) $y' = \sqrt[3]{y^2}$;

б) $y' = \sqrt{1-y^2}$;

в) $y' = 4x\sqrt{y-1}$;

г) $xy' + y = y^2$;

д) $dy - xy(y+2)\,dx = 0$;

е) $\sqrt{y}\sin^2 x\,dx + dy = 0$.

8.15. Найдите решение задачи Коши:

а) $tx' = 2x$, $x(2) = 3$;

б) $(1-t)x' - x = 0$, $x(0) = 1$;

в) $x' = \dfrac{t(1-x^2)}{x(1+t^2)}$, $x(\sqrt{3}) = -\dfrac{3}{2}$.

8.16. Найдите интегральные кривые уравнения, проходящие через заданную точку M:

а) $y' = \dfrac{y}{x}$, 1) $M(1; 1)$; 2) $M(1; 0)$;

б) $dx - \sqrt{1-x^2}\,dy = 0$, $M\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}; 0\right)$.

8.17. Найдите все кривые, обладающие свойством: если через любую точку кривой провести прямые, параллельные осям координат, до пересечения с осями координат, то кривая разделит полученный прямоугольник на две фигуры, площади которых относятся как 1:2.

8.18. Скорость тела пропорциональна пройденному пути. За первые 10 секунд тело проходит 100 метров, за 15 секунд — 200 метров. Какой путь пройдет тело за время t?

8.19. Найдите уравнения интегральных кривых, проходящих через заданную точку M:

а) $(1+e^x)yy' = e^y$, $M(0; 0)$;

б) $x\sqrt{1-y^2}\,dx + y\sqrt{1-x^2}\,dy = 0$, $M(0; 1)$.

§ 27. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

1. Общее решение линейного уравнения первого порядка. Дифференциальные уравнения вида

$$y' = f(x)\,y + g(x) \qquad (1)$$

называются *линейными дифференциальными уравнениями первого порядка.*

Если $g(x) \equiv 0$, то линейное дифференциальное уравнение (1) называется *однородным.* Оно имеет вид

$$y' = f(x)\,y. \qquad (2)$$

Уравнение (2) является уравнением с разделяющимися переменными. В предыдущем параграфе было показано, что все решения этого уравнения задаются формулой

$$y = Ce^{F(x)}, \tag{3}$$

где $F(x)$ — некоторая первообразная функции $f(x)$, а C — произвольная постоянная. В частности, если функция $f(x)$ постоянная, например, $f(x) = k$ для любого x, то уравнение

$$y' = ky$$

имеет общее решение

$$y = Ce^{kx}.$$

Если $f(x) \equiv 0$, то уравнение (1) принимает вид

$$y' = g(x).$$

Как известно, общим решением этого уравнения будет

$$y = G(x) + C,$$

где $G(x)$ — некоторая первообразная функции $g(x)$, а C — произвольная постоянная (постоянная интегрирования).

Теорема. *Если $y = \varphi(x)$ — некоторое решение уравнения* (1), *то все решения этого уравнения задаются формулой*

$$y = Ce^{F(x)} + \varphi(x), \tag{4}$$

где $Ce^{F(x)}$ — *общее решение однородного уравнения* (2).

Доказательство. Прежде всего проверим, что при любом значении постоянной C функция (4) является решением уравнения (1). Действительно,

$$y' = Ce^{F(x)}F'(x) + \varphi'(x) = Ce^{F(x)}f(x) + f(x)\varphi(x) + g(x) = f(x)(Ce^{F(x)} + \varphi(x)) + g(x) = f(x)y + g(x).$$

Пусть теперь $\psi(x)$ — некоторое решение уравнения (1). Покажем, что функция $y = \psi(x) - \varphi(x)$ является решением однородного уравнения (2):

$$y' = \psi'(x) - \varphi'(x) = f(x)\psi(x) + g(x) - f(x)\varphi(x) - g(x) = f(x)(\psi(x) - \varphi(x)) = f(x)y.$$

Поэтому существует постоянная C такая, что

$$\psi(x)-\varphi(x)=Ce^{F(x)},$$

и, следовательно,

$$\psi(x)=Ce^{F(x)}+\varphi(x).$$

Таким образом, любое решение уравнения (1) получается по формуле (4) при некотором значении постоянной C.

Теорема доказана.

Из доказанной теоремы следует, что для нахождения общего решения уравнения (1) достаточно найти хотя бы одно его частное решение.

Для линейного уравнения вида

$$y'=ky+b, \tag{5}$$

где k и b — некоторые числа и $k\neq 0$, частное решение легко находится. Им будет, как легко проверить, постоянная функция $y=-\frac{b}{k}$. Поэтому общее решение уравнения (5) имеет вид

$$y=Ce^{kx}-\frac{b}{k}.$$

Пример 1. Решить уравнение

$$y'+2y+3=0.$$

Решение. У этого уравнения $k=-2$, $b=-3$. Следовательно, общее решение определяется формулой

$$y=Ce^{-2x}-\frac{3}{2},$$

где C — произвольная постоянная.

Пример 2. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'+xy=4x$$

Решение. Подбором находим, что функция $y=4$ является решением данного линейного неоднородного уравнения. Найдем теперь общее решение соответствующего однородного уравнения:

$$y'+xy=0.$$

По формуле (4) получаем, что общее решение этого уравнения имеет вид

$$y = Ce^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

По доказанной теореме общее решение данного линейного неоднородного уравнения задается формулой

$$y = Ce^{-\frac{1}{2}x^2} + 4,$$

где C — произвольная постоянная.

2. **Метод вариации постоянной.** Укажем метод отыскания частного решения неоднородного уравнения

$$y' = f(x)\,y + g(x). \tag{1}$$

Пусть

$$y = Ce^{F(x)} \tag{2}$$

является общим решением линейного однородного уравнения

$$y' = f(x)\,y, \tag{3}$$

тогда частное решение неоднородного уравнения (1) будем искать в следующем виде:

$$y = u(x)\,e^{F(x)}, \tag{4}$$

где $u(x)$ — неизвестная функция. Подставив функцию (4) в уравнение (1), получим

$$u'e^F + ue^F f = fue^F + g$$

и, окончательно,

$$u' = g(x)\,e^{-F(x)}.$$

Следовательно, функция $u(x)$ является некоторой первообразной для функции $g(x)\,e^{-F(x)}$.

Таким образом, чтобы найти частное решение неоднородного уравнения (1), надо в общем решении (2) соответствующего однородного уравнения (3) постоянную C заменить некоторой первообразной для функции $g(x)\,e^{-F(x)}$.

Это метод нахождения частного решения называется *методом вариации постоянной.*

Пример 1. Решить уравнение

$$y' + xy = \sin x. \tag{5}$$

Решение. Для этого уравнения частное решение найти подбором не удается. Найдем его методом вариации постоянной.

Так как общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид

$$y = Ce^{-\frac{1}{2}x^2},$$

то частное решение неоднородного уравнения следует искать в следующем виде:

$$y = u(x)e^{-\frac{1}{2}x^2},$$

где $u(x)$ — неизвестная функция. Подставив в уравнение, получим

$$u' = \sin x \cdot e^{\frac{1}{2}x^2}.$$

Отсюда находим

$$u(x) = \int_{x_0}^{x} e^{\frac{1}{2}t^2} \sin t\, dt.$$

Следовательно, частное решение уравнения (5) имеет вид

$$y = e^{-\frac{1}{2}x^2} \int_{x_0}^{x} e^{\frac{1}{2}t^2} \sin t\, dt,$$

а общее решение, согласно теореме п. 1, выражается формулой

$$y = Ce^{-\frac{1}{2}x^2} + e^{-\frac{1}{2}x^2} \int_{x_0}^{x} e^{\frac{1}{2}t^2} \sin t\, dt, \qquad (6)$$

где C — произвольная постоянная, а x_0 — некоторое фиксированное число.

Пример 2. Найти частное решение уравнения (5), которое удовлетворяет условию $y(0) = 1$.

Решение. Для удобства положим $x_0 = 0$ в формуле (6). Тогда общее решение уравнения (5) имеет вид

$$y = Ce^{-\frac{1}{2}x^2} + e^{-\frac{1}{2}x^2} \int_{0}^{x} e^{\frac{1}{2}t^2} \sin t\, dt.$$

Из условия $y(0)=1$ находим $C=1$, поэтому решением поставленной задачи будет

$$y=e^{-\frac{1}{2}x^2}+e^{-\frac{1}{2}x^2}\int_0^x e^{\frac{1}{2}t^2}\sin t\,dt.$$

Упражнения

8.20. Решите уравнения:

а) $x'=-\frac{2x}{t}+t^2$;

б) $x'=2t-2tx$;

в) $x'+x\operatorname{tg}t=\frac{1}{\cos t}$;

г) $x'=2tx+(t-t^3)e^{t^2}$;

д) $t(t^3+1)x'+(2t^3-1)x=x^2-\frac{2}{x}$.

8.21. Найдите решение, удовлетворяющее начальному условию

а) $(9-t^2)x'+tx=9$, $x(3)=3$;

б) $x'-x\operatorname{tg}t=\frac{1}{\cos t}$, $x(0)=0$;

в) $x'=x\sin t+2\sin 2t$, $x(0)=1$;

г) $(t+1)\,dx=(2x+(t+1)^4)\,dt$, $x(0)=2$.

8.22. Электрическая цепь состоит из последовательно включенных источника постоянного тока, дающего напряжение V, сопротивления R, самоиндукции L и выключателя, который включается при $t=0$. Найдите зависимость силы тока от времени.

8.23. Электрическая цепь состоит из последовательно включенных источника тока, напряжение которого меняется по закону $E=V\sin\omega t$, сопротивления R и самоиндукции L. Найдите силу тока в цепи при установившемся режиме.

§ 28. Примеры дифференциальных уравнений второго порядка

1. Уравнение движения точки. Рассмотрим движение точки P с массой m по прямой l под действием силы F. Для этого на l выберем некоторую точку O и некоторое направление, например слева направо (рис. 45). Тогда положение точки P на прямой l в момент времени t характеризуется координатой $x=x(t)$.

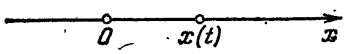


Рис. 45.

Как известно, первая производная $x'(t)$ является скоростью точки P, а вторая производная $x''(t)$ — уско-

рением точки P в момент времени t. Поэтому в силу второго закона Ньютона справедливо следующее уравнение:

$$mx''(t) = F, \qquad (1)$$

которое называется *уравнением движения точки P*.

В общем случае сила F в уравнении (1) может зависеть от времени t, от положения точки x и от скорости $x'(t)$, т. е. в общем случае уравнение (1) имеет вид

$$mx'' = F(t;\ x;\ x'), \qquad (2)$$

где F — заданная функция переменных t, x, x'.

Так как уравнение (2) содержит производную второго порядка, то оно называется *дифференциальным уравнением второго порядка*.

Функция $\varphi(t)$, $t \in]a;\ b[$, называется *решением уравнения* (2), если она имеет производные $\varphi'(t)$ и $\varphi''(t)$ на интервале $]a;\ b[$ и если для любого $t \in]a;\ b[$ справедливо равенство

$$m\varphi''(t) = F(t;\ \varphi(t);\ \varphi'(t)),$$

т. е. если уравнение обращается в тождество по t при подстановке $\varphi(t)$ вместо x.

Как известно из физики, для однозначного описания движения точки, кроме уравнения движения, необходимо задать положение и скорость точки в некоторый момент времени t_0:

$$x(t_0) = x_0,\ x'(t_0) = v_0. \qquad (3)$$

Условия (3) называются *начальными условиями* или *условиями Коши*, а задача отыскания решения уравнения (2), удовлетворяющего начальным условиям (3), называется *задачей Коши*. Доказывается, что для широкого класса уравнений (2) задача Коши имеет единственное решение.

2. Движение точки под действием постоянной силы. Рассмотрим сначала случай, когда сила F не меняется в процессе движения точки P, т. е. когда сила F постоянная. Тогда уравнение движения имеет вид

$$x'' = a, \qquad (1)$$

где $a = \frac{F}{m}$. Из уравнения (1) следует, что скорость $v = x'$

удовлетворяет дифференциальному уравнению первого порядка

$$v' = a. \qquad (2)$$

Как известно из теории неопределенных интегралов, формула

$$v = at + C_1,$$

где C_1 — произвольная постоянная, задает все решения уравнения (2). Следовательно, решение уравнения второго порядка (1) сводится к решению дифференциального уравнения первого порядка

$$x' = at + C_1. \qquad (3)$$

Интегрированием по t получаем

$$x = \frac{1}{2} at^2 + C_1 t + C_2, \qquad (4)$$

где C_2 — произвольная постоянная.

Таким образом, формула (4) содержит все решения уравнения (1), и поэтому она называется *общим решением уравнения* (1).

Общее решение дифференциального уравнения (1) второго порядка содержит две произвольные постоянные C_1 и C_2. При каждых конкретных значениях постоянных C_1 и C_2 в формуле (4) получаются решения, которые называются *частными решениями*.

Чтобы получить частное решение, зададим начальные условия:

$$x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = v_0. \qquad (5)$$

Тогда для нахождения C_1 и C_2 получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} at_0^2 + C_1 t_0 + C_2 = x_0, \\ at_0 + C_1 = v_0. \end{cases}$$

Решив эту систему относительно C_1 и C_2 и подставив найденные значения в формулу (4), получим решение задачи Коши для уравнения (1) с начальными условиями (5).

Однако на практике для нахождения решения задачи Коши (1), (5) поступают следующим образом.

Интегрируя по t от t_0 до t обе части уравнения (1):

$$\int_{t_0}^{t} x''(t)\,dt = \int_{t_0}^{t} a\,dt,$$

по формуле Ньютона—Лейбница получают дифференциальное уравнение первого порядка

$$x'(t) - x'(t_0) = a(t - t_0).$$

Снова интегрируя по t от t_0 до t, получают

$$x(t) - x(t_0) - x'(t_0)(t - t_0) = \frac{a}{2}(t - t_0)^2.$$

Следовательно,

$$x = \frac{a}{2}(t - t_0)^2 + x'(t_0)(t - t_0) + x(t_0).$$

Теперь, чтобы получить решение, удовлетворяющее начальным условиям (5), нужно вместо $x(t_0)$ написать x_0, а вместо $x'(t_0)$ написать v_0.

Таким образом, решение задачи Коши (1), (5) имеет вид

$$x = \frac{a}{2}(t - t_0)^2 + v_0(t - t_0) + x_0.$$

Пример. Рассмотрим движение материальной точки под действием силы тяжести. Для этого ось Ox направим вертикально вниз и, для простоты, положим $t_0 = 0$. Тогда уравнение движения имеет вид $x'' = g$, где $g \approx 9{,}8$ м/с^2 — ускорение свободного падения. Решая это уравнение, получаем

$$x = \frac{gt^2}{2} + v_0 t + x_0.$$

3. Движение точки под действием периодической силы. Пусть сила F, действующая на точку P с массой m, зависит от времени t следующим образом:

$$F = A\cos(\omega t + \alpha),$$

где $A > 0$ и $\omega > 0$.

Тогда уравнение движения имеет вид

$$mx'' = A\cos(\omega t + \alpha).$$

Найдем решения этого уравнения. Для этого обе его части проинтегрируем по t от t_0 до t. Тогда

$$mx'(t) - mx'(t_0) = A\int_{t_0}^{t} \cos(\omega t + \alpha)\, dt = \frac{A}{\omega} \sin(\omega t + \alpha)\Big|_{t_0}^{t} =$$

$$= \frac{A}{\omega} \sin(\omega t + \alpha) - \frac{A}{\omega} \sin(\omega t_0 + \alpha)$$

и, следовательно,

$$x'(t) = \frac{A}{\omega m} \sin(\omega t + \alpha) + x'(t_0) - \frac{A}{\omega m} \sin(\omega t_0 + \alpha).$$

Снова интегрированием по t от t_0 до t получаем

$$x(t) - x(t_0) = -\frac{A}{m\omega^2} \cos(\omega t + \alpha) + \frac{A}{m\omega^2} \cos(\omega t_0 + \alpha) +$$

$$+ \left(x'(t_0) - \frac{A}{m\omega} \sin(\omega t_0 + \alpha)\right)(t - t_0).$$

Таким образом,

$$x = -\frac{A}{m\omega^2} \cos(\omega t + \alpha) + \frac{A}{m\omega^2} \cos(\omega t_0 + \alpha) +$$

$$+ \left(v_0 - \frac{A}{m\omega} \sin(\omega t_0 + \alpha)\right)(t - t_0) + x_0,$$

где $x_0 = x(t_0)$, $v_0 = x'(t_0)$. В частности, если $t_0 = 0$, то

$$x = -\frac{A}{m\omega^2} \cos(\omega t + \alpha) + \frac{A}{m\omega^2} \cos\alpha + \left(v_0 - \frac{A}{m\omega} \sin\alpha\right) t + x_0.$$

Отметим, что полученное решение содержит две произвольные постоянные — начальные данные x_0 и v_0.

4. Движение точки под действием силы, пропорциональной скорости. Пусть на точку P массы m действуют две силы: постоянная сила F, направленная в сторону движения точки, и сила, пропорциональная скорости и направленная против движения. Тогда уравнение движения точки P имеет вид

$$mx'' = F - kx', \qquad (1)$$

где k — коэффициент пропорциональности, причем $k > 0$.

Проинтегрировав по t обе части уравнения (1), получим

$$mx' = Ft - kx + C, \qquad (2)$$

где C — постоянная интегрирования.

Уравнение (2) является линейным уравнением. Чтобы найти его общее решение, нужно найти общее решение соответствующего однородного уравнения

$$mx' = -kx \qquad (3)$$

и какое-нибудь частное решение неоднородного уравнения (2).

Общее решение уравнения (3) задается формулой

$$x = C_1 e^{-\frac{k}{m}t},$$

где C_1 — произвольная постоянная.

Найдем частное решение уравнения (2). Это частное решение будем искать в виде линейной функции

$$x = At + B \qquad (4)$$

с неизвестными коэффициентами A и B.

Для определения A и B функцию (4) подставим в уравнение (2):

$$Am = Ft - kAt - kB + C.$$

Так как это равенство должно быть справедливым для любого t, то при $t = 0$ получаем уравнение

$$Am = -kB + C,$$

а при $t = 1$ уравнение

$$F - kA = 0.$$

Таким образом,

$$A = \frac{F}{k}, \quad B = \frac{C}{k} - \frac{Fm}{k^2},$$

а функция

$$x = \frac{F}{k}t + \frac{C}{k} - \frac{Fm}{k^2}$$

является частным решением уравнения (2).

Согласно теореме, доказанной в предыдущем параграфе, общее решение уравнения (2) задается формулой

$$x = C_1 e^{-\frac{kt}{m}} + \frac{F}{k}t + \frac{C}{k} - \frac{Fm}{k^2}.$$

Положим

$$C_2 = \frac{C}{k} - \frac{Fm}{k^2}.$$

Очевидно, что если C — произвольная постоянная, то и C_2 — произвольная постоянная. Поэтому общее решение уравнения (1) имеет вид

$$x = C_1 e^{-\frac{kt}{m}} + C_2 + \frac{F}{k} t. \qquad (5)$$

Из формулы (5) следует, что движение точки P происходит почти с постоянной скоростью, равной $\frac{F}{k}$. Этот факт широко используется на практике. Например, на этом основано применение парашюта. Когда человек спускается на парашюте, на него действует сила тяжести $F = mg$ и сила сопротивления воздуха, которая пропорциональна скорости и направлена против движения. Движение (спуск) человека на парашюте описывается уравнением вида (5).

Упражнения

8.24. Лодке сообщена начальная скорость $v_0 = 6$ м/с. Через 69 секунд после начала движения скорость лодки уменьшилась вдвое. Найдите закон движения лодки, если сила сопротивления воды прямо пропорциональна скорости лодки.

8.25. Частица массы m брошена вертикально вверх со скоростью v_0. На нее действует сила тяжести и сила сопротивления, равная $2kmv$. Найдите расстояние частицы от точки бросания в момент времени t.

8.26. Пуля входит в доску толщиной h см со скоростью v_0 м/с, а вылетает из доски со скоростью v_1 м/с. Определите время движения пули через доску, если известно, что сила сопротивления доски движению пули пропорциональна квадрату скорости пули.

8.27. Напишите уравнение прямолинейного движения точки массы m под действием силы $F = t^2$ и найдите общее решение полученного уравнения.

8.28. Решите уравнение

$$2x'' + t^3 = 1.$$

8.29. Решите задачу Коши

$$\begin{cases} x'' = 5t^2 + 0{,}1; \\ x(0) = 1; \quad x'(0) = 0. \end{cases}$$

§ 29. Гармонические колебания

1. Уравнение гармонических колебаний. Рассмотрим уравнение

$$x'' + \omega^2 x = 0, \qquad (1)$$

где ω — некоторое положительное число.

Непосредственной подстановкой проверяется, что функция

$$x = A\cos(\omega t + \alpha) \qquad (2)$$

для любых постоянных A и α является решением уравнения (1). Можно показать, что других решений уравнение (1) не имеет. Это утверждение примем без доказательства.

Таким образом, формула (2) задает общее решение уравнения (1).

Функция (2) при любых заданных A, ω и α описывает *гармонический колебательный процесс*. Число $|A|$ называется *амплитудой*, а число α — *начальной фазой* или просто *фазой* колебания (2). Уравнение (1) называется *уравнением гармонических колебаний*. Положительное число ω называется *частотой* колебания. Легко подсчитать, что число колебаний в единицу времени определяется формулой

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi}.$$

Отметим, что общее решение (2) уравнения (1) содержит две произвольные постоянные: амплитуду A и начальную фазу α. Для их определения нужно задать два условия, например, можно задать два начальных условия задачи Коши:

$$x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = v_0. \qquad (3)$$

Тогда для определения постоянных A и α получается следующая система уравнений:

$$\begin{cases} A\cos(\omega t_0 + \alpha) = x_0, \\ -A\omega\sin(\omega t_0 + \alpha) = v_0. \end{cases} \qquad (4)$$

Из нее следует, что

$$A^2\cos^2(\omega t_0 + \alpha) + A^2\sin^2(\omega t_0 + \alpha) = x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2},$$

и, следовательно,

$$A^2 = x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}.$$

Не ограничивая общности, можно считать, что $A > 0$,

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}.$$

Теперь, зная амплитуду A, из системы (4) по формулам тригонометрии находится начальная фаза α.

Из формулы (2) легко получить другой вид общего решения уравнения (1). Действительно,

$$x = A(\cos\omega t \cos\alpha - \sin\omega t \sin\alpha) =$$
$$= A\cos\alpha\cos\omega t - A\sin\alpha\sin\omega t.$$

Положив здесь $C_1 = A\cos\alpha$, $C_2 = -A\sin\alpha$, получим

$$x = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t. \qquad (5)$$

При решении конкретных задач следует использовать как формулу (2), так и формулу (5).

Например, если по условию задачи известны амплитуда и начальная фаза колебания, то, конечно, следует пользоваться формулой (2). Однако для решения задачи Коши с начальными условиями

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = v_0 \qquad (6)$$

удобнее пользоваться формулой (5).

Пример. Решить задачу Коши для уравнения (1) с начальными условиями (6).

Решение. Согласно формуле (5) общее решение данного уравнения имеет вид

$$x = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t.$$

Из первого начального условия $x(0) = x_0$ получаем $C_1 = x_0$. А так как

$$x' = -C_1\omega\sin\omega t + C_2\omega\cos\omega t,$$

то в силу второго начального условия $x'(0) = v_0$ находим $v_0 = C_2\omega$, т. е. $C_2 = \frac{v_0}{\omega}$. Таким образом, функция

$$x = x_0\cos\omega t + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t$$

является решением задачи Коши (1), (6), и других решений эта задача не имеет.

2. Колебания точки под действием упругой силы. Рассмотрим движение точки P с массой m под действием силы F, с которой на точку P действует некоторая упругая пружина, как это показано на рис. 46.

Для составления уравнения движения точки P на прямой, по которой движется точка P, введем координату x, приняв за начало O положение равновесия точки P,

а за положительное направление — направление слева направо. Тогда в силу второго закона Ньютона уравнение движения точки имеет вид

$$mx'' = F.$$

По закону Гука упругая сила F прямо пропорциональна отклонению точки P от положения равновесия и направлена против движения. Поэтому

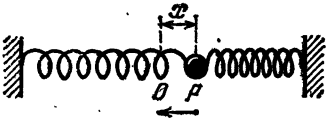


Рис. 46.

$$F = -kx,$$

где число $k > 0$ называется *коэффициентом упругости* данной пружины.

Таким образом, уравнение движения точки P имеет вид

$$mx'' + kx = 0. \qquad (1)$$

Это уравнение является уравнением гармонических колебаний с частотой

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Поэтому его общее решение имеет вид

$$x = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \alpha\right),$$

или

$$x = C_1\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + C_2\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t.$$

Согласно общим формулам, решением задачи Коши для уравнения (1) с начальными условиями

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = v_0 \qquad (2)$$

будет функция

$$x = x_0\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + v_0\sqrt{\frac{m}{k}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t.$$

Амплитуда этого гармонического колебания вычисляется по формуле

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{m}{k}v_0^2}.$$

Заметим, что частота колебания точки P не зависит от начальных условий; она определяется лишь массой точки P и упругостью пружины. Амплитуда A существенно зависит от начальных условий, то же самое можно сказать и о начальной фазе.

Рассмотрим несколько частных случаев решения задачи Коши (1), (2).

Пусть $v_0 = 0$ и $x_0 > 0$. Тогда

$$x = x_0 \cos \sqrt{\frac{k}{m}}\, t,$$

т. е. $A = x_0$ и $\alpha = 0$. Эта функция описывает гармонические колебания точки P с массой m, которая в начальный момент времени $t_0 = 0$ была выпущена из точки с координатой $x_0 > 0$ с нулевой скоростью.

Пусть теперь $x_0 = 0$ и $v_0 > 0$. Тогда

$$x = v_0 \sqrt{\frac{m}{k}} \sin \sqrt{\frac{k}{m}}\, t$$

и, следовательно, $A = v_0 \sqrt{\frac{m}{k}}$ и $\alpha = -\frac{\pi}{2}$. Эта функция описывает гармонические колебания точки P, которая в начальный момент времени $t_0 = 0$ была выпущена из положения равновесия со скоростью v_0.

3. Колебания математического маятника. Математический маятник представляет собой точку P массы m, которая под действием силы тяжести движется по окружности, лежащей в вертикальной плоскости. Радиус этой окружности называется *длиной маятника*.

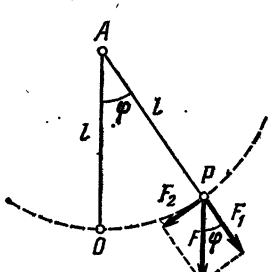


Рис. 47.

На окружности движения маятника введем угловую координату φ, приняв за точку O самую нижнюю точку окружности, а за положительное направление — направление слева направо (рис. 47).

Точка P находится под действием силы тяжести $F = mg$, направленной вертикально вниз. Разложим F на две составляющие F_1 и F_2. Составляющая F_1, направленная по радиусу окружности, не производит движения: она уравновешивается другими силами. Составляющая

F_2, направленная по касательной к окружности, является той силой, которая приводит в движение по окружности точку P. Величина силы F_2 равна $mg\sin\varphi$, и эта сила направлена против возрастания угла φ, поэтому уравнение движения математического маятника имеет вид

$$ml\varphi'' = -mg\sin\varphi,$$

где φ'' — угловое ускорение, а $l\varphi''$ — линейное ускорение точки P.

Сократив на m, получим уравнение

$$l\varphi'' + g\sin\varphi = 0,$$

которое и называется *уравнением математического маятника.*

Решение этого уравнения представляет большие трудности.

Если рассматривать только малые колебания маятника, т. е. считать, что координата φ по модулю мала, то $\sin\varphi$ можно заменить на φ. В результате получим приближенное уравнение

$$l\varphi'' + g\varphi = 0.$$

Оно называется *уравнением малых колебаний математического маятника.* Очевидно, что это уравнение является уравнением гармонических колебаний с $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$. Его общее решение имеет вид

$$\varphi = A\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t + \alpha\right),$$

или

$$\varphi = C_1\cos\sqrt{\frac{g}{l}}\,t + C_2\sin\sqrt{\frac{g}{l}}\,t.$$

Как и в предыдущем пункте, можно рассмотреть задачу Коши с соответствующими начальными условиями и найти ее решение.

Отметим, что частота ω малых колебаний маятника зависит лишь от длины маятника и убывает с возрастанием длины.

Число малых колебаний маятника в секунду определяется формулой

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}},$$

где $g \approx 9{,}8$ м/с^2, а l — длина маятника в метрах.

Упражнения

8.30. Найдите уравнение гармонических колебаний, которому удовлетворяет функция $x = \sin t + \cos t$.

8.31. Какая из функций описывает гармонический колебательный процесс:

а) $x = \sin t + \cos t$; б) $x = t \sin t$;

в) $x = \sin t + \cos 2t$; г) $x = \cos t + 1$?

8.32. Математический маятник длины l выводится из положения равновесия малым горизонтальным перемещением точки подвеса на расстояние a. Найдите отклонение маятника.

8.33. Тяжелая однородная цепочка массы m и длины $2l$ лежит на гладком горизонтальном столе так, что половина ее свешивается со стола. Определите движение цепочки во время ее соскальзывания со стола и найдите время соскальзывания.

§ 30. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

1. Дифференциальные уравнения второго порядка. В общем случае дифференциальное уравнение второго порядка можно записать в следующем виде:

$$F(x;\ y;\ y';\ y'') = 0, \qquad (1)$$

где $y = y(x)$ — искомая неизвестная функция, $y' = y'(x)$ и $y'' = y''(x)$ — ее производные по x первого и второго порядков, а F — заданная функция переменных x, y, y', y''.

Функция $\varphi(x)$, $x \in]a;\ b[$, называется *решением дифференциального уравнения* (1), если она имеет производные $\varphi'(x)$ и $\varphi''(x)$ и если для любого $x \in]a;\ b[$ справедливо равенство

$$F(x;\ \varphi(x);\ \varphi'(x);\ \varphi''(x)) = 0.$$

Другими словами, функция $\varphi(x)$, $x \in]a;\ b[$, называется решением уравнения (1), если при подстановке $\varphi(x)$ вместо y это уравнение обращается в тождество по x.

Дифференциальное уравнение вида

$$y'' = f(x;\ y;\ y'), \qquad (2)$$

где f — заданная функция переменных x, y, y', называется *уравнением, разрешенным относительно второй производной*. При достаточно общих предположениях доказано, что для любых *начальных условий*

$$y(x_0)=y_0, \quad y'(x_0)=y'_0, \tag{3}$$

принадлежащих области определения функции f, существует, и притом единственное, решение $y=y(x)$ уравнения (2), удовлетворяющее условиям (3).

Мы не будем давать строгой формулировки этого утверждения. Заметим лишь, что оно составляет основное содержание одной из фундаментальных теорем теории дифференциальных уравнений — *теоремы Коши*.

2. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами. Дифференциальные уравнения вида

$$y''+py'+qy=f(x), \tag{1}$$

где p и q — некоторые числа, называются *линейными дифференциальными уравнениями второго порядка*. Функция $f(x)$ называется *свободным членом* или *правой частью* уравнения (1).

Если $f(x)\equiv 0$, то дифференциальное уравнение называется *линейным однородным уравнением*. Оно имеет вид

$$y''+py'+qy=0. \tag{2}$$

В этом пункте будем изучать только уравнения вида (2).

Пример 1. Найти все решения уравнения

$$y''-y=0. \tag{3}$$

Решение. Легко проверить, что функция $y=e^x$ является решением данного уравнения. Аналогично проверяется, что и функция $y=e^{-x}$ является решением уравнения (3). Покажем, что при любых постоянных C_1 и C_2 функция

$$y=C_1e^x+C_2e^{-x} \tag{4}$$

является решением уравнения (3). Имеем

$$y'=C_1e^x-C_2e^{-x},$$
$$y''=C_1e^x+C_2e^{-x}=y,$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, любая функция вида (4) является решением уравнения (3). Более того, других решений это

уравнение не имеет. Действительно, пусть $y=\varphi(x)$ — некоторое решение уравнения (3) и пусть

$$\varphi(0)=y_0, \quad \varphi'(0)=y_0'. \tag{5}$$

Найдем функцию вида (4), которая удовлетворяет этим условиям. Имеем

$$\begin{cases} y_0=C_1+C_2, \\ y_0'=C_1-C_2, \end{cases}$$

и поэтому

$$C_1=\frac{y_0+y_0'}{2}, \quad C_2=\frac{y_0-y_0'}{2}.$$

Следовательно, функция

$$y=\frac{y_0+y_0'}{2}e^x+\frac{y_0-y_0'}{2}e^{-x}$$

является решением задачи Коши (3), (5).

В силу единственности решения задачи Коши

$$\varphi(x)=\frac{y_0+y_0'}{2}e^x+\frac{y_0-y_0'}{2}e^{-x},$$

т. е. функция $\varphi(x)$ получается из (4) при соответствующих значениях постоянных C_1 и C_2.

Таким образом, формула (4) задает общее решение уравнения (3).

Пример 2. Решить уравнение

$$y''-4y=0. \tag{6}$$

Решение. Как и в примере 1, решение этого уравнения будем искать в виде

$$y=e^{\lambda x},$$

где λ — неизвестное число. Подставив эту функцию в уравнение, получим

$$\lambda^2e^{\lambda x}-4e^{\lambda x}=0.$$

Следовательно, функция вида $e^{\lambda x}$ удовлетворяет уравнению (6) тогда и только тогда, когда λ удовлетворяет уравнению

$$\lambda^2-4=0.$$

Этому уравнению удовлетворяют два числа $\lambda_1=2$ и $\lambda_2=-2$, и поэтому функции e^{2x} и e^{-2x} являются реше-

ниями уравнения (6) (что, в частности, проверяется и непосредственно).

Теперь, как и в примере 1, можно показать, что общее решение уравнения (6) задается формулой

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

3. Характеристическое уравнение. Рассмотренные примеры наводят на мысль — попытаться и в общем случае искать решения вида $e^{\lambda x}$. Пусть задано линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами

$$y'' + py' + qy = 0. \tag{1}$$

Подставим функцию $e^{\lambda x}$ в уравнение (1):

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + p\lambda e^{\lambda x} + qe^{\lambda x} = 0.$$

Отсюда следует, что функция $e^{\lambda x}$ является решением уравнения (1) тогда и только тогда, когда λ удовлетворяет уравнению

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0. \tag{2}$$

Уравнение (2) называется *характеристическим уравнением* дифференциального уравнения (1).

Заметим, что характеристическое уравнение получается из дифференциального заменой y'' на λ^2, y' на λ и y на 1.

Рассмотрим случай, когда характеристическое уравнение имеет два действительных решения λ_1 и λ_2, $\lambda_1 \neq \lambda_2$. В этом случае общее решение уравнения (1) задается формулой

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}, \tag{3}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Тот факт, что функция (3) удовлетворяет уравнению (1), проверяется непосредственной подстановкой, а то, что других решений уравнение (1) не имеет, следует из теоремы Коши (для уравнения (1) все ее условия выполнены).

Пример. Найти общее решение уравнения

$$y'' + 4y' + 3y = 0. \tag{4}$$

Решение. Напишем характеристическое уравнение данного дифференциального уравнения:

$$\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0.$$

Это уравнение имеет два решения: $\lambda_1 = -1$ и $\lambda_2 = -3$. По формуле (3) получаем общее решение уравнения (4):

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}.$$

4. Случай комплексных решений характеристического уравнения. Рассмотрим линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами:

$$y'' + py' + qy = 0. \qquad (1)$$

Пусть его характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0 \qquad (2)$$

не имеет действительных решений. В этом случае

$$q - \frac{p^2}{4} > 0.$$

Обозначим это число через ω^2. Уравнение (2) имеет два комплексно сопряженных решения:

$$\lambda = \alpha + i\omega \text{ и } \bar{\lambda} = \alpha - i\omega,$$

где $\alpha = -\frac{p}{2}$.

Тогда

$$e^{\lambda x} = e^{\alpha x} e^{i\omega x} = e^{\alpha x}(\cos \omega x + i \sin \omega x).$$

Рассмотрим действительную и мнимую части этой комплекснозначной функции:

$$e^{\alpha x} \cos \omega x, \quad e^{\alpha x} \sin \omega x.$$

Непосредственной проверкой легко убедиться, что эти функции являются решениями дифференциального уравнения (1). (Проверить самостоятельно!)

Как и выше, можно показать, что в этом случае общее решение уравнения (1) задается формулой

$$y = C_1 e^{\alpha x} \cos \omega x + C_2 e^{\alpha x} \sin \omega x, \qquad (3)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Пример. Решить уравнение

$$y'' + 2y' + 2y = 0.$$

Решение. Напишем характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0.$$

Оно имеет два комплексно сопряженных решения: $\lambda = -1 + i$ и $\bar{\lambda} = -1 - i$.

Найдем действительную и мнимую части функции $e^{\lambda x}$:

$$e^{\lambda x} = e^{-x}(\cos x + i \sin x) = e^{-x}\cos x + ie^{-x}\sin x.$$

А затем по формуле (3) находим общее решение данного дифференциального уравнения:

$$y = C_1 e^{-x}\cos x + C_2 e^{-x}\sin x.$$

Замечание. К этому типу уравнений относится уравнение гармонических колебаний

$$y'' + \omega^2 y = 0.$$

Его общее решение имеет вид

$$y = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x.$$

5. Случай, когда характеристическое уравнение имеет одно решение. Пусть характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0, \qquad (1)$$

соответствующее дифференциальному уравнению

$$y'' + py' + qy = 0, \qquad (2)$$

имеет один корень $\lambda = \alpha$ кратности 2. Тогда $p = -2\alpha$, $q = \alpha^2$. Как и выше, легко проверяется, что функция $e^{\alpha x}$ является решением уравнения (2). Покажем, что в этом случае и функция $xe^{\alpha x}$ является решением уравнения (2). Имеем

$$y = xe^{\alpha x}, \quad y' = e^{\alpha x} + \alpha x e^{\alpha x}, \quad y'' = 2\alpha e^{\alpha x} + \alpha^2 x e^{\alpha x}$$

и, далее,

$$y'' + py' + qy = 2\alpha e^{\alpha x} + \alpha^2 x e^{\alpha x} + pe^{\alpha x} + p\alpha x e^{\alpha x} + qxe^{\alpha x} =$$
$$= e^{\alpha x}(2\alpha + p) + xe^{\alpha x}(\alpha^2 + p\alpha + q) =$$
$$= e^{\alpha x}(2\alpha - 2\alpha) + xe^{\alpha x}(\alpha^2 - 2\alpha^2 + \alpha^2) = 0.$$

Таким образом, функции $e^{\alpha x}$ и $xe^{\alpha x}$ являются решениями уравнения (2), и поэтому любая функция вида

$$y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 x e^{\alpha x} \qquad (3)$$

также является решением уравнения (2). Из теоремы Коши следует, что других решений это уравнение не имеет.

Пример. Найти общее решение уравнения

$$y'' + 2y' + y = 0.$$

Решение. Характеристическое уравнение имеет одно решение $\lambda = 1$. Следовательно (см. формулу (3)), общее решение данного дифференциального уравнения имеет вид

$$y = C_1 e^x + C_2 x e^x,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

6. Неоднородные линейные уравнения. Сделаем несколько замечаний относительно неоднородных линейных дифференциальных уравнений

$$y'' + py' + qy = f(x). \qquad (1)$$

Как и в случае линейных дифференциальных уравнений первого порядка, общее решение уравнения (1) является суммой некоторого частного его решения и общего решения соответствующего однородного уравнения

$$y'' + py' + qy = 0. \qquad (2)$$

Используя это замечание, рассмотрим два примера.

Пример 1. Найти общее решение уравнения

$$y'' + 2y' - 3y = 1. \qquad (3)$$

Решение. Подбором находим, что функция $y = -\frac{1}{3}$ является частным решением уравнения (3). Найдем теперь общее решение линейного однородного уравнения

$$y'' + 2y' - 3y = 0. \qquad (4)$$

Его характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$$

имеет решения $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 1$. Следовательно, общее решение уравнения (4) имеет вид

$$y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^x.$$

Так как общее решение неоднородного уравнения является суммой некоторого его частного решения и общего решения соответствующего однородного уравнения, то общее решение уравнения (3) задается формулой

$$y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^x - \frac{1}{3}.$$

Пример 2. Найти общее решение уравнения

$$y'' + 2y' - 3y = x. \qquad (5)$$

Решение. Частное решение уравнения (5) будем искать в виде

$$y = Ax + B,$$

где A и B — неизвестные числа. Подставив эту функцию в (5), получим

$$2A - 3Ax - 3B = x.$$

Из этого равенства следует, что

$$\begin{cases} 2A - 3B = 0, \\ -3A = 1, \end{cases}$$

и поэтому

$$A = -\frac{1}{3}, \quad B = -\frac{2}{9}.$$

Следовательно, функция

$$y = -\frac{1}{3}x - \frac{2}{9}$$

является частным решением уравнения (5), а его общее решение (см. пример 1) имеет вид

$$y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{x} - \frac{1}{3}x - \frac{2}{9}.$$

На этом закончим изучение дифференциальных уравнений.

Упражнения

8.34. Решите уравнения:

а) $x'' - 2x' = 0$;
б) $x'' + 5x' + 6x = 0$;
в) $3x'' - 2x' - 8x = 0$;
г) $x'' + 4x' + 13x = 0$;
д) $x'' + x' + x = 0$;
е) $x'' - 6x' + 9x = 0$;
ж) $x'' - x = 2$;
з) $x'' + 2x' = 2$;
и) $x'' + 9x = 9$;
к) $x'' - 2x' - 3x = e^{4t}$;
л) $x'' - 3x' + 2x = \sin t$;
м) $x'' + x = 4 \sin t$.

8.35. Найдите решения уравнений, удовлетворяющие заданным начальным условиям:

а) $x'' - 3x' + 2x = 0$, $x(0) = 2$, $x'(0) = 3$;
б) $x'' + 2x' + 5x = 0$, $x(0) = x'(0) = 1$;
в) $x'' + 6x' + 9x = 0$, $x(0) = 2$, $x'(0) = 1$;
г) $x'' + 2x' + 2x = 0$, $x(0) = a$, $x'(0) = b$;
д) $x'' - x' - 6x = 2$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$;

е) $x''-9x=2-t$, $x(0)=0$, $x'(0)=1$;

ж) $x''+4x=2\cos 2t$, $x(0)=0$, $x(0)=4$.

8.36. При каких значениях α и β все решения уравнения

$$x''+\alpha x'+\beta x=0$$

являются периодическими функциями?

8.37. При каких значениях α уравнение

$$x''+\alpha x=0$$

имеет решения, удовлетворяющие условиям $x(0)=x(\pi)=0$?

Глава IX

ЧИСЛОВЫЕ И СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

§ 31. Числовые ряды

1. Определение ряда и его суммы. Пусть задана числовая последовательность a_n, $n \in N$. Тогда последовательность

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad n \in N, \tag{1}$$

называется *числовым рядом* и обозначается

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \quad \text{или} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n. \tag{2}$$

Числа $a_1, a_2, \ldots$ называются *членами ряда* (2), соответственно первым, вторым и т. д.; a_n называется *n-м* или *общим членом ряда* (2).

Суммы $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2, \ldots, S_n = a_1 + \ldots + a_n, \ldots$ называются *частичными суммами ряда* (2).

Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n+k} = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \tag{3}$$

называется *n-м остатком ряда* (2). Отметим, что у ряда (3) первым членом является $(n+1)$-й член исходного ряда (2) и k-й член ряда (3) равен a_{n+k}.

Согласно определению, ряды — это особый вид последовательностей, поэтому можно говорить о сходимости и расходимости рядов.

Ряд называется *сходящимся*, если последовательность его частичных сумм сходится. Если последовательность частичных сумм ряда расходится, то он называется *расходящимся*. Следовательно, ряд (2) называется сходящимся,

если существует предел

$$S=\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Этот предел называется *суммой ряда* (2).

Если ряд (2) сходится и S — его сумма, то будем писать

$$S=\sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Пример 1. Рассмотрим ряд $\sum_{k=1}^{\infty} q^k$ и покажем, что он сходится, если $|q|<1$, и расходится, если $|q|\geqslant 1$.

Этот ряд уже рассматривался при изучении суммы геометрической прогрессии (см. Алгебра, часть I, § 17, п. 11). Напомним, что

$$S_n=\sum_{k=1}^{n} q^k=\frac{q-q^{n+1}}{1-q} \text{ для всех } n\in N.$$

Если $|q|<1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} q^{n+1}=0$, и поэтому

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{q-q^{n+1}}{1-q}=\frac{q}{1-q}.$$

Следовательно, если $|q|<1$, то данный ряд сходится и

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n=\frac{q}{1-q}.$$

Если $|q|>1$, то $\lim\limits_{n\to\infty}|q|^{n+1}=+\infty$, поэтому последовательность (q^{n+1}) неограниченная и, следовательно, не имеет предела. Отсюда следует, что последовательность (S_n) тоже не имеет предела, т. е. данный ряд расходится, если $|q|>1$.

Пусть $|q|=1$. Если $q=1$, то

$$S_1=1,\quad S_2=2,\ \ldots,\quad S_n=n,\ \ldots$$

и, как легко видеть, данный ряд расходится.

Если $q=-1$, то

$$S_1=-1,\quad S_2=-1+1=0,\quad S_3=-1,\ \ldots,$$

т. е. частичные суммы с нечетными номерами равны -1, а с четными номерами равны 0. Такая последовательность

не имеет предела. Следовательно, если $|q|=1$, то данный ряд расходится.

Теорема 1. *Если ряд сходится, то и любой его остаток сходится. Если какой-нибудь остаток ряда сходится, то и ряд сходится.*

Доказательство. Пусть дан ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Рассмотрим некоторый его остаток, т. е. ряд вида $\sum_{k=1}^{\infty} a_{N+k}$. Для любого n имеем

$$S_{N+n}=\sum_{k=1}^{a+N} a_k=\sum_{k=1}^{N} a_k+\sum_{k=N+1}^{n+N} a_k=S_N+\sum_{k=1}^{n} a_{N+k}=S_N+S_n^*,$$

где S_n^* — n-я частичная сумма N-го остатка данного ряда. Отсюда следует, что если ряд сходится и его сумма равна S, то

$$\lim_{n\to\infty} S_n^*=\lim_{n\to\infty}(S_{N+n}-S_N)=$$
$$=\lim_{n\to\infty} S_{N+n}-S_N=\lim_{n\to\infty} S_n-S_N=S-S_N$$

и, следовательно, N-й остаток ряда сходится. Наоборот, если N-й остаток ряда сходится и его сумма равна R_N, то

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty} S_{N+n}=\lim_{n\to\infty}(S_N+S_n^*)=$$
$$=S_N+\lim_{n\to\infty} S_n^*=S_N+R_N$$

и, следовательно, ряд сходится. Теорема 1 доказана.

Из доказательства теоремы 1 следует, что если S — сумма данного ряда, то

$$S=S_N+R_N,$$

где S_N — N-я частичная сумма, а R_N — сумма N-го остатка данного ряда.

Теорема 2. *Если ряды с общими членами a_n и b_n сходятся и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=A,\quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n=B,$$

то для любых чисел α *и* β *ряд с общим членом* $c_n=\alpha a_n+\beta b_n$ *сходится и*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n+\beta b_n)=\alpha A+\beta B.$$

Действительно,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(\alpha a_k+\beta b_k)=\lim_{n\to\infty}\left(\alpha\sum_{k=1}^{n}a_k+\beta\sum_{k=1}^{n}b_k\right)=$$

$$=\alpha\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k+\beta\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}b_k=\alpha A+\beta B,$$

а это и означает, что ряд с общим членом $c_n=\alpha a_n+\beta b_n$ сходится и его сумма равна $\alpha A+\beta B$.

Пример 2. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2\cdot 3^{-n}+3\cdot 2^{1-n}).$$

Общий член этого ряда имеет вид

$$c_n=2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n+3\cdot 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Как показано в примере 1, ряды с общими членами $a_n=\left(\frac{1}{3}\right)^n$ и $b_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$ сходятся и

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2},\quad\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1.$$

В силу теоремы 2 данный ряд сходится и

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2\cdot 3^{-n}+3\cdot 2^{1-n})=2\cdot\frac{1}{2}+6=7.$$

Теорема 3 (необходимое условие сходимости ряда). *Если ряд с общим членом* a_n *сходится, то* $a_n\to 0$ *при* $n\to\infty$.

Доказательство. Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится и его сумма равна S. Тогда

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n-1}a_k=S_n-S_{n-1}$$

для любого $n \geqslant 2$, и поэтому

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

Теорема 3 доказана.

Пример 3. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$.

Для этого ряда не выполняется необходимое условие сходимости.

Действительно,

$$a_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \frac{n-1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} =$$

$$= \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(\frac{n}{n-1}\right)^{-n+1} = \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{-n+1} =$$

$$= \frac{1-\frac{1}{n}}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}}$$

и, следовательно (см. Алгебра, часть I, § 17, п. 9),

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{e}.$$

Таким образом, данный ряд расходится.

Пример 4. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Этот ряд называется *гармоническим*. Покажем, что он расходится.

Заметим, что

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx < \frac{1}{k} \quad \text{для всех} \quad k \in N.$$

Поэтому

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} > \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} \quad \text{для всех} \quad n \in N.$$

А так как

$$\sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} = \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^{n+1} = \ln(n+1),$$

то

$$S_n > \ln(n+1) \quad \text{для всех} \quad n \in N,$$

и, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$, т. е. гармонический ряд расходится.

Рассмотренный пример показывает, что из условия $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ не следует сходимость ряда с общим членом a_n. Это условие является необходимым, но не является достаточным для сходимости ряда.

2. Ряды с неотрицательными членами. Прежде всего заметим, что последовательность частичных сумм любого ряда с неотрицательными членами является неубывающей. Действительно, пусть дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ с неотрицательными членами: $a_n \geqslant 0$. Тогда

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \leqslant \sum_{k=1}^{n+1} a_k = S_{n+1} \quad \text{для всех} \quad n.$$

Известно (см. Алгебра, часть I, § 17, п. 9), что если неубывающая последовательность ограничена, то она имеет конечный предел. Если же она неограниченная, то она является бесконечно большой (см. Алгебра, часть I, § 17, п. 8); про нее говорят, что она расходится к $+\infty$. Поэтому, если ряд с неотрицательными членами расходится, то будем говорить, что он расходится к $+\infty$ и что его сумма равна $+\infty$. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Если последовательность частичных сумм ряда с неотрицательными членами ограничена, то ряд сходится. Если последовательность частичных сумм ряда с неотрицательными членами неограничена, то ряд расходится к* $+\infty$.

Пример 1. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}. \qquad (1)$$

Покажем, что если $\alpha > 1$, то ряд (1) сходится.

Для любого $n \geqslant 2$ имеем

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha} < 1 + \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{dx}{x^\alpha} =$$

$$= 1 + \int_1^n \frac{dx}{x^\alpha} = 1 + \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Big|_1^n < 1 + \frac{1}{\alpha-1} = \frac{\alpha}{\alpha-1},$$

и поэтому, согласно теореме 1, при $\alpha > 1$ ряд (1) сходится.

В предыдущем пункте мы уже показывали, что при $\alpha = 1$ ряд (1) расходится. Покажем, что он расходится при любом $\alpha \leqslant 1$. Имеем (см. пример 4 п. 1)

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} > \ln(1+n),$$

и поэтому $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = +\infty$.

Таким образом, ряд (1) при $\alpha > 1$ сходится, а при $\alpha \leqslant 1$ расходится к $+\infty$.

Теорема 2 (признак сравнения). *Пусть для рядов* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *выполняется условие: существует* N *такое, что* $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$ *для всех* $n \geqslant N$

Тогда, если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *сходится, то и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится. Если же ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится, то и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *расходится.*

Доказательство. Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится, то сходится и его остаток $\sum\limits_{k=N}^{\infty} b_k$ (см. теорему 1 п. 1). Пусть $B = \sum\limits_{k=N}^{\infty} b_k$, тогда

$$\sum_{k=N}^{n} a_k \leqslant \sum_{k=N}^{n} b_k \leqslant \sum_{k=N}^{\infty} b_k = B \text{ для всех } n \geqslant N,$$

т. е. последовательность частичных сумм ряда $\sum\limits_{k=N}^{\infty} a_k$ ог-

раничена. Так как, кроме того, $a_k \geqslant 0$ для всех $k \geqslant N$, то в силу теоремы 1 ряд $\sum\limits_{k=N}^{\infty} a_k$ сходится. Следовательно, сходится и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ (см. теорему 1 п. 1).

Если ряд из a_n расходится, то ряд из b_n не может сходиться, так как из его сходимости следует сходимость ряда из a_n

Теорема 2 доказана.

Пример 2. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 nx}{n^2}$, где x — некоторое действительное число.

Так как $0 \leqslant \frac{\sin^2 nx}{n^2} \leqslant \frac{1}{n^2}$ для всех n и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится (см. пример 1), то по признаку сравнения данный ряд сходится для любого $x \in R$.

Пример 3. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ расходится, так как

$$\frac{\ln n}{n} > \frac{1}{n} \text{ для всех } n \geqslant 3$$

и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится.

Лемма. *Пусть дан ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *с положительными членами. Тогда, если существует* q *такое, что*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant q < 1 \text{ для всех } n, \tag{2}$$

то ряд сходится. Если же

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1 \text{ для всех } n, \tag{3}$$

то ряд расходится.

Доказательство. Если выполняется условие (2), то

$$a_{n+1} \leqslant qa_n \leqslant q^2 a_{n-1} \leqslant \ldots \leqslant a_1 q^n.$$

Следовательно,

$$a_n \leqslant a_1 q^{n-1} \text{ для всех } n.$$

А так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1}$, у которого $0 < q < 1$, сходится, то по признаку сравнения данный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ тоже сходится. Первая часть леммы доказана.

Если выполняется условие (3), то

$$a_{n+1} \geqslant a_n \geqslant \ldots \geqslant a_1,$$

т. е. $a_n \geqslant a_1 > 0$ для всех n. Отсюда следует, что для ряда не выполняется необходимое условие сходимости и, следовательно, ряд расходится.

Лемма доказана.

Теорема 3 (признак Даламбера). *Пусть для ряда с положительными членами a_n выполняется условие*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q.$$

Тогда, если $q < 1$, то ряд сходится, а если $q > 1$, то ряд расходится.

Доказательство. Из определения предела последовательности следует, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует N такое, что

$$q - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < q + \varepsilon \text{ для всех } n \geqslant N.$$

Если $q < 1$, то, выбрав $\varepsilon > 0$ так, что $q + \varepsilon < 1$, получим

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < q + \varepsilon < 1 \text{ для всех } n \geqslant N,$$

т. е. N-й остаток данного ряда удовлетворяет условию (2) леммы. Следовательно, ряд сходится.

Если $q > 1$, то, выбрав $\varepsilon > 0$ так, что $q - \varepsilon > 1$, получим

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > q - \varepsilon > 1 \text{ для всех } n \geqslant N,$$

т. е. N-й остаток ряда удовлетворяет условию (3) леммы. Следовательно, ряд расходится.

Теорема 3 доказана.

Пример 4. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$.

Здесь $a_n = \frac{n}{2^n}$, и поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\cdot 2^n}{n\ 2^{n+1}} = \frac{1}{2}.$$

По признаку Даламбера данный ряд сходится.

Пример 5. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{n!}$.

Здесь $a_n = \frac{10^n}{n!}$. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{10^{n+1}\cdot n!}{(n+1)!\ 10^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{10}{n+1} = 0.$$

По признаку Даламбера данный ряд сходится.

3. Абсолютно и условно сходящиеся ряды. Важный класс сходящихся рядов образуют так называемые абсолютно сходящиеся ряды. Прежде чем давать соответствующее определение, докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Если ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *сходится, то и ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится.*

Доказательство. Положим

$$p_n = \frac{|a_n| + a_n}{2}, \quad q_n = \frac{|a_n| - a_n}{2}.$$

Очевидно, что

$$0 \leqslant p_n \leqslant |a_n|, \quad 0 \leqslant q_n \leqslant |a_n| \text{ для всех } n.$$

По признаку сравнения ряды $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ сходятся. А так как $a_n = p_n - q_n$, то (см. теорему 2 п. 1) данный ряд тоже сходится. Теорема 1 доказана.

Определение 1. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Теорема 1 утверждает, что если ряд абсолютно сходится, то он и просто сходится.

Для исследования рядов на абсолютную сходимость можно пользоваться всеми признаками сходимости для рядов с неотрицательными членами

Теорема 2. *Пусть для ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *выполняется условие*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = q.$$

Тогда, если $q < 1$, *то ряд сходится абсолютно, а если* $q > 1$, *то ряд расходится.*

Доказательство. Если $q < 1$, то абсолютная сходимость следует из признака Даламбера для рядов с положительными членами. Если $q > 1$, то для ряда не выполняется необходимое условие сходимости ряда (см. конец доказательства леммы из п. 2) и, следовательно, ряд расходится.

Теорема 2 доказана.

Пример 1. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}}$, где $\alpha > 1$.

Этот ряд сходится и, более того, сходится абсолютно Действительно, здесь

$$a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}}, \quad |a_n| = \frac{1}{n^{\alpha}}$$

и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$, где $\alpha > 1$, сходится. Следовательно, данный ряд сходится абсолютно и, в частности, он сходится.

Пример 2. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^{\alpha}}$, где $\alpha > 1$, а x — произвольное действительное число.

Этот ряд абсолютно сходится, так как

$$\left|\frac{\sin nx}{n^{\alpha}}\right| \leqslant \frac{1}{n^{\alpha}} \text{ для всех } n.$$

и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ при $\alpha > 1$ сходится.

Пример 3. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{\alpha}}$, где $0 < \alpha \leqslant 1$, не является абсолютно сходящимся, так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$, где $\alpha \leqslant 1$.

расходится. Ниже будет доказано, что данный ряд сходится при любом $\alpha > 0$.

Теорема 3 (признак Лейбница). *Если последовательность (a_n) из положительных чисел монотонно убывает и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ сходится.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность частичных сумм данного ряда с четными номерами:

$$S_{2m} = \sum_{k=1}^{2m} (-1)^{k-1} a_k, \quad m \in N.$$

Так как

$$S_{2m} = a_1 - a_2 + \ldots + a_{2m-1} - a_{2m} = \sum_{k=1}^{m} (a_{2k-1} - a_{2k})$$

и согласно условию $a_{2k-1} - a_{2k} > 0$, то последовательность S_{2m}, $m \in N$, монотонно возрастающая. С другой стороны,

$$S_{2m} = a_1 - (a_2 - a_3) - \ldots - a_{2m} < a_1 \text{ для всех } m,$$

т. е. рассматриваемая последовательность ограниченная. Следовательно, она имеет предел. Пусть

$$S = \lim_{m\to\infty} S_{2m}. \tag{1}$$

Для частичных сумм с нечетными номерами имеем

$$\lim_{m\to\infty} S_{2m-1} = \lim_{m\to\infty} (S_{2m} - a_{2m}) = \lim_{m\to\infty} S_{2m} - \lim_{m\to\infty} a_{2m} = S. \tag{2}$$

Из (1) и (2) следует, что данный ряд сходится и его сумма равна S. Теорема 3 доказана.

Из признака Лейбница следует, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{\alpha}}$$

сходится при любом $\alpha > 0$. Однако он не является абсолютно сходящимся, если $0 < \alpha \leqslant 1$.

Определение 2. Ряд называется *условно сходящимся*, если он является сходящимся, но не является абсолютно сходящимся.

Например, оба ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$$

сходятся. Однако если первый ряд абсолютно сходящийся, то второй ряд не является абсолютно сходящимся и, следовательно, является условно сходящимся.

Абсолютно сходящиеся ряды обладают многими свойствами обычных конечных сумм. В частности, для них имеет место свойство, аналогичное свойству коммутативности: сумма абсолютно сходящегося ряда не меняется при любой перестановке членов ряда.

Абсолютно сходящиеся ряды можно перемножать почленно. Более точно это утверждение формулируется следующим образом: если ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ абсолютно сходятся и $A=\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $B=\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, то ряд, членами которого являются всевозможные произведения вида $a_k b_n$, абсолютно сходится и его сумма равна произведению AB.

Условно сходящиеся ряды по своим свойствам существенно отличаются от обычных конечных сумм. Например, для них справедливо следующее утверждение: в условно сходящемся ряде можно так переставить члены, что полученный ряд будет сходиться к любому наперед заданному числу. Более того, можно так переставить члены условно сходящегося ряда, что полученный ряд будет расходиться.

4. Последовательности и ряды с комплексными членами. Пусть задана последовательность комплексных чисел

$$z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_n,\ \ldots \tag{1}$$

Как и для действительных чисел, эту последовательность будем обозначать (z_n).

Определение. Комплексное число z называется *пределом последовательности* (z_n), если

$$\lim_{n\to\infty} |z_n - z| = 0,$$

где $|z_n - z|$ — модуль комплексного числа $z_n - z$.

Последовательность, имеющая предел, называется *сходящейся*.

Если число z является пределом последовательности (z_n), то пишут

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z \quad \text{или} \quad z_n \to z \quad \text{при} \quad n \to \infty$$

и говорят, что последовательность (z_n) сходится к z.

Теорема 1. *Последовательность комплексных чисел $z_n = a_n + ib_n$, $n \in N$, сходится тогда и только тогда, когда сходятся последовательности их действительных и мнимых частей, причем*

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} a_n + i \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Доказательство. Пусть

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b.$$

Покажем, что тогда $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$, где $z = a + ib$. Так как

$$|z_n - z| = \sqrt{(a_n - a)^2 + (b_n - b)^2} \leqslant |a_n - a| + |b_n - b|$$

и $|a_n - a| \to 0$, $|b_n - b| \to 0$ при $n \to \infty$, то $|z_n - z| \to 0$ при $n \to \infty$, что и требовалось доказать.

Если же $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$, где $z = a + ib$, то из неравенств

$$|a_n - a| \leqslant |z_n - z|, \quad |b_n - b| \leqslant |z_n - z|$$

следует, что $|a_n - a| \to 0$ и $|b_n - b| \to 0$ при $n \to \infty$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$.

Теорема 1 доказана.

Из теоремы 1 и соответствующих теорем для последовательностей действительных чисел вытекают следующие утверждения для последовательностей комплексных чисел.

Следствие 1. *Сходящая последовательность имеет единственный предел.*

Следствие 2. *Если последовательности (z_n) и (w_n) сходящиеся, то предел суммы $(z_n + w_n)$ равен сумме пределов:*

$$\lim_{n\to\infty} (z_n + w_n) = \lim_{n\to\infty} z_n + \lim_{n\to\infty} w_n,$$

предел разности $(z_n - w_n)$ равен разности пределов:

$$\lim_{n\to\infty} (z_n - w_n) = \lim_{n\to\infty} z_n - \lim_{n\to\infty} w_n,$$

и предел произведения $(z_n w_n)$ *равен произведению пределов:*

$$\lim_{n\to\infty} z_n w_n = \lim_{n\to\infty} z_n \cdot \lim_{n\to\infty} w_n.$$

Если, кроме того, $z_n \neq 0$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} z_n \neq 0$, *то предел частного* $\left(\frac{w_n}{z_n}\right)$ *равен частному пределов:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{w_n}{z_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} w_n}{\lim\limits_{n\to\infty} z_n}.$$

Как и в п. 1, определяются ряды с комплексными членами $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$. Для них остаются в силе все определения и теоремы из п. 1. В частности, для рядов с комплексными членами справедливо следующее *необходимое условие сходимости*:

Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *сходится, то* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Пример 1. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z^n$, где z — некоторое комплексное число.

Если $|z| \geqslant 1$, то для данного ряда не выполняется необходимое условие сходимости:

$$|z^n| = |z|^n \geqslant 1 \text{ для всех } n,$$

и, следовательно, ряд расходится.

Если же $|z| < 1$, то ряд сходится. Действительно, для n-й частичной суммы справедлива формула

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} z^k = \frac{z - z^{n+1}}{1-z},$$

и поэтому

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{z}{1-z} - \frac{z}{1-z} \lim_{n\to\infty} z^n.$$

Так как $|z^n| = |z|^n \to 0$ при $n \to \infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty} z^n = 0$, и поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} z^k = \frac{z}{1-z}.$$

Таким образом, если $|z|<1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ сходится и

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n = \frac{z}{1-z},$$

а если $|z| \geqslant 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ расходится.

Теорема 2. *Пусть дан ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *с комплексными членами. Тогда, если ряд из модулей* $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ *сходится, то и ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *сходится.*

Доказательство. Пусть $u_n = a_n + ib_n$ и, следовательно, $|u_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$. Так как $|a_n| \leqslant |u_n|$, $|b_n| \leqslant |u_n|$, и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ сходится, то по признаку сравнения ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ абсолютно сходятся. Пусть

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = B.$$

Тогда по теореме 1

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k + i \sum_{k=1}^{n} b_k \right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k + i \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} b_k = A + iB,$$

что и доказывает теорему.

Отметим, что, как и раньше, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется *абсолютно сходящимся.* Следовательно, теорема 2 утверждает, что если ряд с комплексными членами абсолютно сходится, то он и просто сходится.

Пример 2. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, где z — некоторое комплексное число.

Здесь

$$u_n = \frac{z^n}{n!}, \quad |u_n| = \frac{|z|^n}{n!}.$$

Докажем, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!}$ с действительными членами сходится при любом z.

Если $z = 0$, то $u_n = 0$, а ряд из нулей сходится. Если $z \neq 0$, то $|z| > 0$ и к ряду можно применить признак Даламбера. Имеем

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n \to \infty} \frac{|z|}{n+1} = 0$$

для любого комплексного $z \neq 0$, и поэтому ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ сходится.

Таким образом, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ сходится абсолютно при любом комплексном z.

Упражнения

9.1. Найдите суммы следующих рядов:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n-1} \right)$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{10^n}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{7^n}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{10^{2n}} + \frac{50}{10^{2n+1}} \right)$.

9.2. Сходятся или расходятся следующие ряды:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1000n+1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$?

9.3. Используя признак сравнения, исследуйте на сходимость следующие ряды:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3}$; б) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}-1}$; в) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{1}{3^n}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n^2+2)}}$; е) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$.

9.4. Используя признак Даламбера, исследуйте на сходимость следующие ряды:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n-1)!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\,2^n}{n^n}$.

9.5. Исследуйте на абсолютную и условную сходимость следующие ряды:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{2n-1}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n!}$;

г) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}$; е) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n+1}}$.

§ 32. Степенные ряды

1. Радиус сходимости и круг сходимости степенного ряда. В этом параграфе будем рассматривать ряды вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \qquad (1)$$

где z_0 и $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ — заданные комплексные числа, а z — переменная, принимающая любое комплексное число.

Такие ряды называются *степенными рядами*. Числа $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ называются *коэффициентами степенного ряда* (1).

Общий член ряда (1)

$$u_n = a_n (z-z_0)^n$$

является функцией от z, и при каждом фиксированном значении переменной z является некоторым комплексным

числом. Следовательно, при каждом значении переменной z ряд (1) является числовым рядом.

Отметим, что у степенного ряда счет членов ведется не с единицы, а с нуля: первый член называется нулевым, второй — первым и т. д. Для степенного ряда такой счет является естественным, так как нулевой член u_0 является произведением коэффициента a_0 на многочлен нулевой степени $(z-z_0)^0=1$, первый член u_1 есть произведение a_1 на $z-z_0$ и, вообще, *n-й член u_n равен произведению коэффициента a_n на многочлен n-й степени $(z-z_0)^n$.*

Так как между точками координатной плоскости и комплексными числами имеется взаимно однозначное соответствие, то часто вместо «комплексное число z» говорят «точка z». Так что если ряд (1) сходится при $z=z_1$, то говорят, что данный степенной ряд сходится в точке z_1.

Множество всех точек z, в которых ряд сходится, называется его *областью сходимости*. Заметим, что любой степенной ряд вида (1) сходится в точке z_0, так что область сходимости любого степенного ряда содержит по крайней мере одну точку. Дальнейшие сведения об устройстве области сходимости степенного ряда получим из следующей замечательной теоремы, носящей имя норвежского математика Н. Абеля (1802—1829).

Теорема 1. *Если степенной ряд* (1) *сходится в точке $z_1\neq z_0$, то он сходится абсолютно в любой точке z такой, что $|z-z_0|<|z_1-z_0|$. Если же ряд* (1) *расходится в точке z_1, то он расходится в любой точке z, у которой $|z-z_0|>|z_1-z_0|$.*

Другими словами, если степенной ряд (1) сходится в точке $z_1\neq z_0$, то он сходится абсолютно в любой точке z из круга $|z-z_0|<|z_1-z_0|$. Если же ряд (1) расходится в точке z_1, то он расходится в любой точке, лежащей вне круга $|z-z_0|\leqslant|z_1-z_0|$. О точках окружности $|z-z_0|=|z_1-z_0|$ теорема Абеля ничего не утверждает.

Доказательство. Если числовой ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z_1-z_0)^n$$

сходится, то общий член этого ряда ограничен.

Пусть $|a_n(z_1-z_0)^n|\leqslant M$ для всех n. Тогда, если $|z-z_0|<|z_1-z_0|$, то

$$|a_n(z-z_0)^n|=|a_n(z_1-z_0)^n|\cdot\left(\frac{|z-z_0|}{|z_1-z_0|}\right)^n\leqslant M\cdot q^n,$$

где $q=\frac{|z-z_0|}{|z_1-z_0|}<1$. Применив признак сравнения (с геометрической прогрессией), получим, что в любой точке z из круга $|z-z_0|<|z_1-z_0|$ ряд сходится.

Пусть теперь ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z_1-z_0)^n$ расходится. Тогда ряд (1) расходится в любой точке z_2, для которой $|z_2-z_0|>|z_1-z_0|$, так как если бы он сходился в точке z_2, то он по доказанному должен сходиться в точке z_1. Теорема 1 доказана.

Из теоремы Абеля следует, что для степенного ряда (1) возможны три ситуации:

1) ряд (1) сходится только в точке z_0;

2) ряд (1) сходится во всех точках z;

3) существует число $R>0$ такое, что для всех z из круга $|z-z_0|<R$ ряд сходится, а для всех z, $|z-z_0|>R$, ряд расходится.

Определение 1. Число $R>0$ такое, что ряд (1) сходится для всех z, $|z-z_0|<R$, и расходится для всех z, $|z-z_0|>R$, называется *радиусом сходимости ряда* (1). Если ряд (1) сходится только в точке z_0, то $R=0$. Если ряд (1) сходится при любом z, то $R=+\infty$.

Таким образом, у любого степенного ряда есть радиус сходимости R и, согласно определению, $0\leqslant R\leqslant+\infty$.

Определение 2. Множество всех точек z, удовлетворяющих неравенству $|z-z_0|<R$, где R — радиус сходимости ряда (1), называется *кругом сходимости ряда* (1).

Отметим, что если $0<R<+\infty$, то круг сходимости ряда (1) — это открытый круг радиуса R с центром в точке z_0. Если $R=+\infty$, то круг сходимости — это вся комплексная плоскость. Если $R=0$, то кругом сходимости является пустое множество.

Теорема 2. *Если у степенного ряда* (1) *последовательность* $\left(\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}\right)$ *имеет конечный или бесконечный предел, то для радиуса сходимости справедлива формула*

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}. \qquad (2)$$

Доказательство Пусть

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=A$$

Рассмотрим сначала случай, когда $0 < A < +\infty$. Выберем некоторое $z_1 \neq z_0$ и к числовому ряду $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot |z_1 - z_0|^n$ применим признак Даламбера. Здесь $u_n = |a_n| \cdot |z_1 - z_0|^n$, и поэтому

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{|a_{n+1}| \cdot |z_1 - z_0|^{n+1}}{|a_n| \cdot |z_1 - z_0|^n} =$$

$$= |z_1 - z_0| \lim_{n \to \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = |z_1 - z_0| \cdot \frac{1}{A}.$$

Если $\frac{1}{A}|z_1 - z_0| < 1$, то ряд (1) сходится абсолютно, если $\frac{1}{A}|z_1 - z_0| > 1$, то ряд расходится. Следовательно, $R = A$.

Если $A = +\infty$, то $\lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0$ для любого $z \neq z_0$ и, следовательно, ряд сходится при любом z, т. е. $R = +\infty$.

Если $A = 0$, то $\lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = +\infty$ для любого $z \neq z_0$ и, следовательно, ряд расходится при любом $z \neq z_0$, а это и означает, что $R = 0$.

Теорема 2 доказана.

В последнем пункте предыдущего параграфа рассматривались ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Там было показано, что первый ряд сходится для всех z, $|z| < 1$, и расходится для всех z, $|z| \geqslant 1$, а второй ряд сходится при всех z. Следовательно, у первого ряда $R = 1$, а у второго ряда $R = +\infty$. Легко проверить, что то же самое получается и по формуле (2).

Пример 1. Рассмотрим степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n}$ и найдем его радиус сходимости.

Здесь $a_n = \frac{1}{2^n} > 0$ для всех n.

По формуле (1) получаем

$$R = \lim_{n \to \infty} \frac{1 \cdot 2^{n+1}}{2^n \cdot 1} = 2.$$

Таким образом, данный ряд сходится во всех точках z, $|z|<2$, и расходится во всех точках z, $|z|>2$. Для полноты исследования заметим, что этот ряд расходится во всех точках z, $|z|=2$, так как в них не выполнено необходимое условие сходимости ряда.

Пример 2. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}$.

У этого ряда все коэффициенты положительные: $a_n=\frac{1}{n^2}>0$ для всех n. По формуле (2) получаем

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2}=1.$$

Следовательно, $|z|<1$ — круг сходимости данного ряда.

Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится, то данный ряд сходится абсолютно для любого z, $|z|=1$.

Таким образом, данный ряд сходится абсолютно при всех z, $|z|\leqslant 1$, и расходится при других z.

Для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$ так же доказывается, что его радиус сходимости равен 1. Однако на границе круга сходимости, т. е. на окружности $|z|=1$, имеются как точки, в которых ряд сходится, так и точки, в которых ряд расходится. Например, в точке $z=1$ ряд расходится, а в точке $z=-1$ по признаку Лейбница он сходится

Пример 3. Найти радиус сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{2^n}$.

К этому ряду нельзя применить формулу (2), так как у него все нечетные коэффициенты равны нулю:

$$a_{2n+1}=0 \quad \text{и} \quad a_{2n}=\frac{1}{2^n} \quad \text{для всех } n$$

Для нахождения радиуса сходимости зафиксируем некоторое значение $z\neq 0$ и применим признак Даламбера к числовому ряду с общим членом $u_n=\frac{|z|^{2n}}{2^n}$. Имеем

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\frac{|z|^{2(n+1)}\cdot 2^n}{2^{n+1}|z|^{2n}}=\frac{|z|^2}{2}$$

Следовательно, если $|z|^2 < 2$, то ряд сходится абсолютно, а если $|z|^2 > 2$, то ряд расходится. Таким образом, $R = \sqrt{2}$.

2. Степенные ряды с действительными членами. В этом пункте будем рассматривать степенные ряды с действительными членами, т. е. ряды вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \tag{1}$$

где x_0, a_0, a_1, ..., a_n, ... — заданные действительные числа и x принимает лишь действительные значения.

Заметим, что если x принимает произвольное комплексное значение z, то рассматриваемые ряды будут степенными рядами с комплексными членами, и поэтому для них остаются в силе все определения и теоремы из п. 1. Так что если R — радиус сходимости ряда (1), то ряд расходится для всех x таких, что $|x - x_0| > R$, и сходится для всех x таких, что $|x - x_0| < R$, т. е. для всех x из интервала $]x_0 - R; x_0 + R[$, который называется *интервалом сходимости*. В частности, если $R = +\infty$, то интервалом сходимости будет все множество действительных чисел $\boldsymbol{R} =]-\infty; +\infty[$, а если $R = 0$, то ряд сходится только в точке x_0.

На интервале сходимости степенной ряд определяет функцию

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n. \tag{2}$$

Эта функция называется *суммой степенного ряда*.

Можно доказать, что сумма степенного ряда непрерывна и имеет непрерывные производные любого порядка на интервале сходимости ряда. Кроме того, производная суммы $S'(x)$ является суммой ряда из производных, т. е.

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}. \tag{3}$$

Аналогично,

$$S''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x - x_0)^{n-2},$$

$$S'''(x) = \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2) a_n (x - x_0)^{n-3}$$

и т. д. В этом смысле иногда говорят, что для степенных рядов производная суммы равна сумме производных или что степенные ряды можно дифференцировать почленно:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n (x-x_0)^n)'. \qquad (4)$$

Это утверждение о почленном дифференцировании степенных рядов мы примем без доказательства. Также без доказательства примем и следующее утверждение о почленном интегрировании степенных рядов:

интеграл от суммы степенного ряда равен сумме ряда из интегралов от соответствующих членов данного ряда, т. е.

$$\int_a^b S(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b a_n (x-x_0)^n\,dx \qquad (5)$$

для любого отрезка $[a; b]$ *из интервала сходимости.* Другими словами, степенной ряд на интервале сходимости можно интегрировать почленно:

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b a_n (x-x_0)^n\,dx. \qquad (6)$$

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Найти сумму степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n. \qquad (7)$$

Прежде всего найдем радиус сходимости R ряда (7). У этого ряда коэффициенты задаются формулой $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, и поэтому (см. формулу (2) п. 1)

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

Следовательно, ряд (7) сходится на интервале $]-1;1[$ и его сумма $S(x)$ имеет непрерывную производную $S'(x)$, причем согласно формуле (3) о почленном дифференцировании степенного ряда

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{x^n}{n}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} (-x)^{n-1}.$$

Последний ряд на интервале $]-1;\ 1[$ сходится к функции $\frac{1}{1+x}$, и поэтому

$$S'(x)=\frac{1}{1+x}.$$

Интегрируя, получаем $S(x)=\ln(1+x)+C$, где C — некоторая постоянная. Так как $S(0)=0$, $\ln(1+0)=0$, то и $C=0$.

Таким образом,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}=\ln(1+x)$$

для любого x из интервала $]-1;\ 1[$.

Пример 2. Найти сумму степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}nx^n. \tag{8}$$

Здесь $a_n=n$ и

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1.$$

Следовательно, ряд (8) сходится на интервале $]-1;\ 1[$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=x\sum_{n=1}^{\infty}(x^n)'.$$

По формуле (4)

$$\sum_{n=1}^{\infty}(x^n)'=\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)'=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}.$$

Таким образом,

$$\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=\frac{x}{(1-x)^2}$$

для любого x из интервала $]-1;\ 1[$.

Упражнения

9.6. Найдите радиусы сходимости следующих степенных рядов:

а) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}z^n$; б) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}z^n$; в) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{3n}}{3^n}$;

г) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{n!}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty} n! z^n$.

9.7. Найдите круги сходимости следующих степенных рядов:

а) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n} (z-1)^n$; б) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+i)^n}{2^n}$;

в) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1-i)^{2n}}{2^n}$; г) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+2i)^n}{n!}$.

9.8. Найдите промежутки сходимости следующих рядов:

а) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} x^{2k-1}$; б) $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 x^k$;

в) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k2^k}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$;

д) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{\sqrt{k}}$; е) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$.

§ 33. Ряды Тейлора

1. Формула Тейлора. Пусть функция $f(x)$ определена и имеет непрерывную производную $f'(x)$ в некоторой окрестности точки x_0. Тогда по формуле Ньютона — Лейбница

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)\, dt.$$

Если функция $f(x)$, кроме того, имеет вторую непрерывную производную $f''(x)$, то по формуле интегрирования по частям

$$\int_{x_0}^{x} f'(t)\, dt = -\int_{x_0}^{x} f'(t)\, d(x-t) =$$

$$= -f'(t)(x-t)\Big|_{x_0}^{x} + \int_{x_0}^{x} f''(t)(x-t)\, dt =$$

$$= f'(x_0)(x-x_0) + \int_{x_0}^{x} f''(t)(x-t)\, dt$$

и, следовательно,

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\int_{x_0}^{x} f''(t)(x-t)\,dt.$$

Далее, если $f(x)$ имеет третью непрерывную производную $f'''(x)$, то

$$\int_{x_0}^{x} f''(t)(x-t)\,dt=\int_{x_0}^{x} f''(t)\,d\left(-\frac{1}{2}(x-t)^2\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}(x-t)^2 f''(t)\Big|_{x_0}^{x}+\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} f'''(t)(x-t)^2\,dt=$$

$$=\frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2+\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} f'''(t)(x-t)^2\,dt$$

и, следовательно,

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+$$

$$+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} f'''(t)(x-t)^2\,dt.$$

Аналогично, если $f(x)$ имеет четвертую непрерывную производную $f^{IV}(x)$, то

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+$$

$$+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+\frac{1}{3!}\int_{x_0}^{x} f^{IV}(t)(x-t)^3\,dt,$$

и т. д. Вообще, если $f(x)$ имеет $(n+1)$-ю непрерывную производную $f^{(n+1)}(x)$, то

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots$$

$$\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt. \quad (1)$$

Эта формула называется *формулой Тейлора функции $f(x)$ в точке x_0 с остаточным членом в интегральной форме.* Многочлен

$$f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

называется *многочленом Тейлора*, а функция

$$R_n(x)=\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt \qquad (2)$$

называется *остаточным членом*.

Если считать, по определению, что $f(x_0)=f^{(0)}(x_0)$ и $0!=1$, то формулу Тейлора (1) можно записать в более компактной форме:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_n(x). \qquad (3)$$

Согласно теореме о среднем, примененной к интегралу (2), существует число ξ, лежащее между x_0 и x, такое, что

$$R_n(x)=\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\xi)\int_{x_0}^{x}(x-t)^n\,dt=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Если функция $f(x)$ имеет на интервале $]x_0-\delta;\ x_0+\delta[$ непрерывную производную $(n+1)$-го порядка, то для любого $x\in]x_0-\delta;\ x_0+\delta[$ существует ξ, лежащее между x_0 и x, такое, что*

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \qquad (4)$$

Эта формула называется *формулой Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа*. Правая часть формулы Тейлора (1), (3) или (4) называется *разложением функции $f(x)$ по формуле Тейлора в точке x_0 до n-го порядка*.

Теорема 2. *Пусть функция $f(x)$ имеет на интервале $]x_0-\delta;\ x_0+\delta[$ непрерывную производную $(n+1)$-го порядка. Тогда, если существуют числа $a_0, a_1, \ldots, a_n$ и непрерывная функция $\varphi(x)$ такие, что*

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k(x-x_0)^k+\varphi(x)(x-x_0)^{n+1} \qquad (5)$$

для любого x из $]x_0-\delta;\ x_0+\delta[$, то

$$a_k=\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!},\quad k=0,\ 1,\ \ldots,\ n,$$

т. е. правая часть формулы (5) *является разложением функции* $f(x)$ *по формуле Тейлора в точке* x_0 *до* n*-го порядка.*

Доказательство. Из (5) и формулы Тейлора (4) следует, что

$$a_0+a_1(x-x_0)+\ldots+a_n(x-x_0)^n+\varphi(x)(x-x_0)^{n+1}=$$
$$=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+$$
$$+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

При $x=x_0$ получаем $a_0=f(x_0)$. Следовательно,

$$a_1+a_2(x-x_0)+\ldots+a_n(x-x_0)^{n-1}+\varphi(x)(x-x_0)^n=$$
$$=f'(x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^{n-1}+$$
$$+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^n.$$

При $x=x_0$ получаем $a_1=f'(x_0)$.

Аналогично доказывается, что

$$a_2=\frac{f''(x_0)}{2},\ \ldots,\ a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

и, наконец, $\varphi(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$. Теорема 2 доказана.

Заметим, что правая часть формулы (5) называется *разложением функции по степеням* $x-x_0$ *до* n*-го порядка.* Следовательно, теорема 2 утверждает, что разложение функции $f(x)$ по степеням $x-x_0$ до n-го порядка единственное — это разложение функции $f(x)$ по формуле Тейлора.

Пример 1. Разложим функцию $f(x)=e^x$ по формуле Тейлора в точке $x_0=0$ до третьего порядка.

Так как $f'(x)=e^x$, $f''(x)=e^x$, $f'''(x)=e^x$, $f^{IV}(x)=e^x$ и $f(0)=f'(0)=f''(0)=f'''(0)=1$, то для любого $x\in R$

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{e^\xi}{4!}x^4,$$

где ξ лежит между x и нулем.

Пример 2. Разложим функцию $\sin x$ по степеням $x-x_0$ до третьего порядка.

Имеем $(\sin x)' = \cos x$, $(\sin x)'' = -\sin x$, $(\sin x)''' = -\cos x$. Следовательно,

$$\sin x = \sin x_0 + \cos x_0 \cdot (x - x_0) + \frac{-\sin x_0}{2}(x - x_0)^2 + \frac{-\cos x_0}{3!}(x - x_0)^3 + R_3(x),$$

где

$$R_3(x) = \frac{1}{3!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^3 \sin t\, dt = \frac{\sin \xi}{4!}(x - x_0)^4;$$

точка ξ лежит между x_0 и x.

Особенно простой вид разложения $\sin x$ по формуле Тейлора получается в точке $x_0 = 0$. Действительно,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{\sin \xi}{4!}x^4.$$

Легко видеть, что формула Тейлора для $\sin x$ в точке $x_0 = 0$ до четвертого порядка имеет вид

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{\cos \xi}{5!}x^5,$$

где ξ лежит между x и нулем.

Пример 3. Какую погрешность имеет приближение $\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$ для x из отрезка $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$?

Из формулы Тейлора (см. пример 2) следует, что

$$\left|\sin x - \left(x - \frac{x^3}{6}\right)\right| = \left|\frac{\cos \xi}{5!}x^5\right| \leqslant \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^5.$$

Самые грубые подсчеты показывают, что указанное приближение $\sin x$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$ имеет абсолютную погрешность, не превышающую 0,01.

Пример 4. Разложим функцию $f(x) = e^{\sin x}$ по формуле Тейлора в точке $x_0 = 0$ до третьего порядка.

Рассмотрим функцию e^y. Для нее справедливо следующее разложение (см. пример 1):

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + \frac{e^\eta}{4!}y^4,$$

где η лежит между y и нулем.

Положив здесь $y = \sin x$, получим

$$e^{\sin x} = 1 + \sin x + \frac{1}{2}(\sin x)^2 + \frac{1}{6}(\sin x)^3 + \frac{e^\eta}{4!}(\sin x)^4.$$

В примере 2 было показано, что

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{\cos \xi}{5!} x^5.$$

Следовательно,

$$e^{\sin x} = 1 + x - \frac{x^3}{6} + \frac{\cos \xi}{5!} x^5 + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{\cos \xi}{5!} x^5\right)^2 +$$

$$+ \frac{1}{6}\left(x - \frac{x^3}{6} + \dots\right)^3 + \frac{e^{\eta}}{4!}\left(x - \frac{x^3}{6} + \dots\right)^4 =$$

$$= 1 + x - \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^3 + \varphi(x) x^4 =$$

$$= 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + \varphi(x) x^4,$$

где $\varphi(x)$ — некоторая непрерывная функция.

Согласно теореме 2 это и есть нужное разложение.

2. Формула Тейлора для некоторых элементарных функций. В этом пункте получим разложения по формуле Тейлора в точке $x_0 = 0$ до n-го порядка функций e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$ и $(1+x)^{\alpha}$.

1. Формула Тейлора для функции $f(x) = e^x$ в точке $x_0 = 0$. Имеем $f'(x) = e^x$, $f''(x) = e^x$ и, вообще, $f^{(k)}(x) = e^x$. Поэтому формула Тейлора для функции e^x в точке $x_0 = 0$ имеет вид

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x),$$

где

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n e^t \, dt = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

Таким образом, формула Тейлора для e^x в точке $x_0 = 0$ с остаточным членом в форме Лагранжа имеет вид

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\xi},$$

где ξ лежит между x и нулем.

2. Формула Тейлора для функции $f(x) = \sin x$ в точке $x_0 = 0$. Имеем

$$(\sin x)' = \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right),$$

$$(\sin x)'' = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\right)' = \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{2} + x\right)$$

и т. д. Для n-й производной по индукции получаем

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(n\frac{\pi}{2} + x\right).$$

Следовательно, $f^{(n)}(0) = \sin\frac{n\pi}{2}$, и поэтому $f^{(n)}(0) = 0$ для четных n и $f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k$ для нечетных $n = 2k+1$.

Таким образом, формула Тейлора для $\sin x$ в точке $x_0 = 0$ с остаточным членом в интегральной форме имеет вид

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \\ + \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+2)!}\int_0^x (x-t)^{2n+2}\cos t\,dt,$$

а с остаточным членом в форме Лагранжа принимает вид

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \\ + \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+3)!}x^{2n+3}\cos\xi,$$

где точка ξ лежит между 0 и x.

При помощи знака суммы $\sum$ последняя формула записывается следующим образом:

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} + \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+3)!}x^{2n+3}\cos\xi.$$

3. Формула Тейлора для функций $f(x) = \cos x$ в точке $x_0 = 0$. Как и для $\sin x$, доказывается формула

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(n\frac{\pi}{2} + x\right).$$

Для четных $n = 2k$

$$(\cos x)^{(2k)} = \cos(k\pi + x) = (-1)^k\cos x,$$

а для нечетных $n = 2k+1$

$$(\cos x)^{(2k+1)} = \cos\left(k\pi + \frac{\pi}{2} + x\right) = (-1)^{k+1}\sin x.$$

Следовательно,

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + \\ + \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!} \int_0^x (x-t)^{2n+1} \cos t \, dt,$$

а формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа имеет вид

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+2)!} x^{2n+2} \cos \xi,$$

где точка ξ лежит между 0 и x.

4. Формула Тейлора для функции $f(x) = \ln(1+x)$ в точке $x_0 = 0$. Имеем

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}, \quad f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$$

и т. д. По индукции получаем

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$$

и

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!.$$

Следовательно,

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \\ + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{1}{(1+\xi)^{n+1}},$$

где ξ лежит между x и нулем. Короче,

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{1}{(1+\xi)^{n+1}}.$$

Заменив x на $-x$, получим следующее разложение:

$$\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} - \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{1}{(1-\xi)^{n+1}}.$$

5. Формула Тейлора для функции $f(x) = (1+x)^\alpha$ в точке $x_0 = 0$. Так как

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}, \quad f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$$

и, вообще,

$$f^{(k)}(x)=\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k},$$

то

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\ldots$$
$$\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+$$
$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\xi)^{\alpha-n-1}x^{n+1},$$

где ξ лежит между x и нулем.

В частности, если $\alpha=n$, то формула Тейлора является формулой Ньютона для бинома

$$(1+x)^n=1+nx+C_n^2x^2+\ldots+C_n^nx^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^kx^k.$$

По аналогии в общем случае также пишут

$$(1+x)^{\alpha}=\sum_{k=0}^{n}C_{\alpha}^kx^k+C_{\alpha}^{n+1}(1+\xi)^{\alpha-n-1}x^{n+1},$$

где

$$C_{\alpha}^k=\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!},\quad C_{\alpha}^0=1.$$

При $\alpha=-1$ получаем $C_{-1}^k=(-1)^k$, и поэтому

$$(1+x)^{-1}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^kx^k+(-1)^{n+1}(1+\xi)^{-n-2}x^{n+1}.$$

3. Ряды Тейлора. Пусть функция $f(x)$ определена и имеет производные всех порядков в некоторой окрестности точки x_0. Тогда степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \qquad (1)$$

называется *рядом Тейлора* функции $f(x)$ в точке x_0.

Лемма. *Для того чтобы ряд Тейлора функции $f(x)$ сходился к $f(x)$ в точке x, необходимо и достаточно, чтобы в этой точке остаток формулы Тейлора стремился к нулю при $n\to\infty$.*

Доказательство. Из формулы Тейлора

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_n(x)$$

следует, что если $R_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$, то

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = \lim_{n\to\infty} (f(x) - R_n(x)) = f(x),$$

т. е. ряд (1) сходится к $f(x)$.

Наоборот, если ряд (1) сходится к $f(x)$, то

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty} \left(f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \right) =$$

$$= f(x) - \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = 0.$$

Лемма доказана.

Теорема 1. *Ряд Тейлора функции e^x для любого $x \in R$ сходится к e^x, т. е.*

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \textit{для всех} \quad x \in R. \tag{2}$$

Доказательство. Прежде всего покажем, что ряд (2) сходится абсолютно при любом x.

Общий член ряда (2) имеет вид $u_n = \frac{x^n}{n!}$, и, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0$$

для любого $x \neq 0$. По признаку Даламбера ряд абсолютно сходится при любом $x \in R$, и, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^n}{n!} = 0 \quad \text{для всех} \quad x \in R.$$

Теперь из формулы Тейлора

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\xi}$$

в пределе при $n \to \infty$ следует равенство (2).

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Ряд Тейлора функции $\sin x$ для любого $x \in R$ сходится к $\sin x$, т. е.*

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \textit{для всех} \quad x \in R. \tag{3}$$

Доказательство. Здесь

$$u_n = (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

и поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^2}{(2n+2)(2n+3)} = 0$$

для любого $x \neq 0$. По признаку Даламбера ряд (3) сходится абсолютно при любом x. Следовательно, при любом x

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} = 0.$$

Теперь из формулы Тейлора

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+3)!} x^{2n+3} \cos\xi$$

и того, что

$$\left|\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+3)!} x^{2n+3} \cos\xi\right| \leqslant \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!} \to 0$$

при $n \to \infty$, следует, что ряд (3) сходится к $\sin x$. Теорема 2 доказана.

Аналогично доказывается и следующая теорема.

Теорема 3. *Ряд Тейлора функции* $\cos x$ *для любого* $x \in \boldsymbol{R}$ *сходится к* $\cos x$, *т. е.*

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \quad \textit{для всех} \quad x \in \boldsymbol{R}. \tag{4}$$

Теорема 4. *Ряд Тейлора функции* $\ln(1+x)$ *для любого* $x \in]-1;\ 1[$ *сходится к* $\ln(1+x)$, *т. е.*

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \quad \textit{для всех} \quad x \in]-1;\ 1[. \tag{5}$$

Доказательство. В примере 1 п. 2 § 32 было доказано, что степенной ряд (5) сходится для любого x из интервала $]-1;\ 1[$ и его сумма равна $\ln(1+x)$. Теорема 4 доказана.

Теорема 5. *Ряд Тейлора функции* $(1+x)^\alpha$ *для любого* $x \in]-1;\ 1[$ *сходится к* $(1+x)^\alpha$, *т. е.*

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} C_\alpha^n x^n \quad \text{для всех} \quad x \in]-1;\ 1[. \qquad (6)$$

Доказательство. Если α равно нулю или натуральному числу, то ряд (6) является конечной суммой. В остальных случаях все коэффициенты степенного ряда (6) $a_n = C_\alpha^n$ отличны от нуля. Следовательно, радиус сходимости вычисляется по формуле

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{|\alpha - n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n-\alpha} = 1.$$

Таким образом, степенной ряд (6) сходится для любого x из интервала $]-1;\ 1[$ и расходится для любого x, $|x| > 1$.

Пусть $f(x)$—сумма ряда (6). Тогда, дифференцируя ряд почленно, получаем

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n C_\alpha^n x^{n-1} = \alpha + \alpha(\alpha-1)x + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{2} x^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{(n-1)!} x^{n-1} + \ldots$$

Умножим это равенство на $(1+x)$:

$$(1+x)f'(x) = \alpha + \alpha x + \alpha(\alpha-1)x + \alpha(\alpha-1)x^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{(n-1)!} x^{n-1} +$$
$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{(n-1)!} x^n + \ldots = \alpha\left\{1 + \alpha x + \ldots\right.$$
$$\ldots + \frac{(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{(n-1)!} x^n +$$
$$\left. + \frac{(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)(\alpha-n)}{n!} x^n + \ldots\right\} = \alpha\left\{1 + \alpha x + \ldots\right.$$
$$\left. \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \ldots\right\} = \alpha f(x).$$

Решая дифференциальное уравнение $(1+x)f'(x) = \alpha f(x)$, получаем $f(x) = C(1+x)^\alpha$.

Для нахождения постоянной C положим $x = 0$. Тогда $f(0) = C$, а так как $f(0) = 1$, то и $C = 1$. Следовательно, $f(x) = (1+x)^\alpha$.

Теорема 5 доказана.

4. Функции e^z, $\sin z$ и $\cos z$. Из теорем 1, 2 и 3 п. 3 и теоремы Абеля для степенных рядов следует, что ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!},\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1},\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n}$$

сходятся для любого комплексного z. Положим, по определению,

$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!},\quad \sin z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1},$$

$$\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n}.$$

Функции e^z, $\sin z$ и $\cos z$ определены для любого комплексного z, причем для действительного $z=x$ это обычные функции e^x, $\sin x$ и $\cos x$.

Для $z=iy$, где y — действительное, имеем

$$e^{iy}=\sum_{n=0}^{\infty}i^n\frac{y^n}{n!}=\sum_{k=0}^{\infty}i^{2k}\frac{y^{2k}}{(2k)!}+\sum_{k=0}^{\infty}i^{2k+1}\frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!}=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{y^{2k}}{(2k)!}+i\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!}=\cos y+i\sin y.$$

Таким образом,

$$e^{iy}=\cos y+i\sin y$$

и аналогично

$$e^{-iy}=\cos y-i\sin y.$$

Можно доказать, что

$$e^{z_1+z_2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z_1+z_2)^n}{n!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z_1^k}{k!}\cdot\sum_{m=0}^{\infty}\frac{z_2^m}{m!}=e^{z_1}\cdot e^{z_2}.$$

Из этих формул следует, что если $z=x+iy$, то справедливо равенство

$$e^z=e^x\cdot e^{iy}=e^x(\cos y+i\sin y).$$

Заметим, что этим равенством ранее, в гл. I, определялось e^z для комплексных z. Следовательно, новое определение e^z не противоречит уже данному определению.

Упражнения

9.9. Разложите по формуле Тейлора в точке $x_0=0$ следующие функции:

а) $\ln\cos x$ до четвертого порядка;

б) $\sin(\sin x)$ до третьего порядка;

в) $\operatorname{tg} x$ до пятого порядка.

9.10. Какую погрешность имеют приближения:

а) $\operatorname{tg} x \approx x+\frac{x^3}{3}$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right]$;

б) $\sqrt{1+x} \approx 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}$ на отрезке $[0; 1]$?

9.11. Разложите в ряд по степеням x следующие функции и найдите радиусы сходимости полученных рядов:

а) $y=e^{-x^2}$; б) $y=2^{x/2}$;

в) $y=\ln\frac{4+x}{4-x}$; г) $y=\cos^2 x$;

д) $y=\frac{1}{(1-x)^3}$; е) $y=\frac{1}{1+x^3}$;

ж) $z=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; з) $y=\frac{1}{x^2-2x-3}$; и) $y=\frac{x^2+2x+3}{x^2-5x+6}$.

9.12. Разложите в ряд по степеням x следующие функции и найдите радиусы сходимости полученных рядов:

а) $y=\operatorname{arctg} x$; б) $y=\arcsin x$;

в) $y=\arccos x$; г) $y=\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x+\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}$;

д) $\int\limits_0^x e^{-t^2}\,dt$; е) $\int\limits_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$; ж) $\int\limits_0^x \frac{\operatorname{arctg} t}{t}\,dt$.

Указание. Полезно рассмотреть производные заданных функций.

Глава X

РЯДЫ ФУРЬЕ

§ 34. Ряды Фурье для периодических функций с периодом $T=2\pi$

1. Постановка задачи и определение ряда Фурье. В предыдущей главе изучались разложения функций в степенные ряды, т. е. разложения сложных функций на простые степенные функции вида $a(x-x_0)^n$. Такие разложения не всегда возможны и не всегда удобны в приложениях. При изучении сложных периодических процессов естественно возникает задача о представлении функций, описывающих эти процессы, в виде суммы конечного или бесконечного числа простых периодических функций.

В качестве таких функций берутся простые гармоники, т. е. функции вида

$$A\sin(\omega x+\alpha) \tag{1}$$

или, что то же самое, функции вида

$$a\cos\omega x+b\sin\omega x.$$

Если $\omega=0$, то функция (1) является постоянной, а если $\omega\neq 0$, то она является периодической с периодом $\frac{2\pi}{\omega}$. В частности, каждая простая гармоника с $\omega=n$, где n — целое, имеет 2π в качестве одного из своих периодов.

Рассмотрим задачу о разложении 2π-периодической функции $f(x)$ в ряд вида

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=$$

$$=\frac{a_0}{2}+a_1\cos x+b_1\sin x+a_2\cos 2x+b_2\sin 2x+\ldots$$

$$\ldots+a_n\cos nx+b_n\sin nx+\ldots, \tag{2}$$

где a_0, a_1, b_1, ..., a_n, b_n, ... — некоторые числа. Такие ряды называются *тригонометрическими*, а числа a_0, ..., ..., a_n, b_n, ... — их *коэффициентами*. Член $\frac{a_0}{2}$ называется *свободным членом*. Свободный член берется в виде $\frac{a_0}{2}$ ради удобства.

При условии, что тригонометрический ряд (2) сходится к функции $f(x)$, найдем формулы, выражающие коэффициенты ряда (2) через функцию $f(x)$. Для простоты будем предполагать, что функция $f(x)$ равна сумме конечного числа простых гармоник:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) =$$

$$= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \ldots + a_N \cos Nx + b_N \sin Nx. \quad (3)$$

Проинтегрировав равенство (3) по x от $-\pi$ до π, получим

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{a_0}{2} 2\pi = a_0 \pi,$$

так как интегралы от $\cos nx$ и $\sin nx$ равны нулю. Следовательно,

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx. \quad (4)$$

Умножив равенство (3) на $\cos x$ и проинтегрировав по x от $-\pi$ до π, получим

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos x\,dx = a_1 \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x\,dx,$$

так как интегралы от других слагаемых равны нулю. Действительно,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \cos x\,dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos x\,dx = \frac{a_0}{2} \sin x \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} b_1 \sin x \cos x\,dx = \frac{1}{2} b_1 \sin^2 x \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

и, наконец, если $N > 1$, то

$$\int_{-\pi}^{\pi} a_N \cos Nx \cos x\, dx =$$

$$= \frac{1}{2} a_N \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(N+1)x + \cos(N-1)x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{2} a_N \left(\frac{\sin(N+1)x}{N+1} + \frac{\sin(N-1)x}{N-1} \right) \Bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} b_N \sin Nx \cos x\, dx =$$

$$= b_N \cdot \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin(N+1)x + \sin(N-1)x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{2} b_N \left(-\frac{\cos(N+1)x}{N+1} - \frac{\cos(N-1)x}{N-1} \right) \Bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Вычислим теперь интеграл от $\cos^2 x$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+\cos 2x}{2}\, dx = \frac{1}{2} \cdot 2\pi = \pi.$$

Следовательно,

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos x\, dx.$$

Аналогично, умножив равенство (3) на $\sin x$ и проинтегрировав по x от $-\pi$ до π, получим

$$b_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin x\, dx.$$

И вообще, умножив равенство (3) на $\cos nx$ и проинтегрировав по x от $-\pi$ до π, получим

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx, \qquad (5)$$

а умножив на $\sin nx$ и проинтегрировав по x от $-\pi$ до π, получим

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx. \qquad (6)$$

Таким образом, в простейшем случае, когда $f(x)$ есть сумма конечного числа гармоник с периодом 2π, получены формулы (4), (5), (6), выражающие коэффициенты a_0, a_n, b_n через $f(x)$.

Рассмотрим теперь произвольную 2π-периодическую функцию или просто функцию, определенную лишь на отрезке $[-\pi; \pi]$.

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена и интегрируема на отрезке $[-\pi; \pi]$. Тогда тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \qquad (2)$$

коэффициенты которого определены по формулам

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx, \qquad (4)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \qquad (5)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx, \qquad (6)$$

называется *рядом Фурье функции* $f(x)$, а коэффициенты a_0, a_n, b_n — *коэффициентами Фурье функции* $f(x)$.

Если ряд (2) является рядом Фурье функции $f(x)$, то будем писать

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Из определения следует, что найти ряд Фурье данной функции — значит найти коэффициенты Фурье этой функции по формулам (4), (5), (6) и написать тригонометрический ряд (2) с этими коэффициентами.

Пример 1. Найти ряд Фурье функции $f(x)=\operatorname{sign} x$, $x\in[-\pi;\pi]$.

Решение. По формулам (4), (5), (6) находим:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sign} x\,dx=0,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sign} x\cos nx\,dx=0,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sign} x\sin nx\,dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin nx\,dx-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\sin nx\,dx=$$

$$=-\frac{1}{\pi}\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{\pi}\frac{\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{0}=$$

$$=\frac{1-\cos n\pi}{n\pi}\cdot 2=\frac{2}{n\pi}(1-(-1)^n).$$

Следовательно,

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}(1-(-1)^n)\sin nx.$$

Так как $b_{2k}=0$, а $b_{2k-1}=\frac{4}{(2k-1)\pi}$, то полученный ряд Фурье можно записать проще:

$$f(x)\sim\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{(2k-1)\pi}\sin(2k-1)x$$

или, что то же самое,

$$f(x)\sim\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}.$$

Пример 2. Найти ряд Фурье функции $f(x)=|x|$, $x\in[-\pi;\pi]$.

Решение. По формуле (4) находим

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\,dx-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}x\,dx.$$

Сделав замену в последнем интеграле (заменив x на $-x$), получим

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{1}{\pi}\,x^2\Big|_0^{\pi} = \pi.$$

Аналогично, по формуле (5) находим

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos nx\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\cos nx\,dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx.$$

К полученному интегралу применим формулу интегрирования по частям:

$$\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx = \int_0^{\pi} x\,d\left(\frac{\sin nx}{n}\right) =$$

$$= x\,\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi} \sin nx\,dx = \frac{1}{n}\,\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi} = \frac{(-1)^n - 1}{n^2}.$$

Следовательно,

$$a_n = \frac{2}{\pi}\,\frac{(-1)^n - 1}{n^2},$$

т. е. $a_{2k} = 0$, $a_{2k-1} = -\dfrac{4}{\pi(2k-1)^2}$.

Наконец, по формуле (6) находим

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x| \sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx -$$

$$- \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\sin nx\,dx = 0.$$

Таким образом,

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.$$

Замечание. Ряд Фурье определен для любой интегрируемой функции, заданной на отрезке $[-\pi; \pi]$. Однако если этот ряд сходится, то его сумма, очевидно, будет периодической функцией с периодом $T=2\pi$. В этом смысле этот ряд естественно считать рядом Фурье 2π-периодической функции, которая получается из данной периодическим продолжением с интервала $]-\pi; \pi[$ на всю действительную прямую $\boldsymbol{R}$ (в точке $x=\pi$ она может быть задана произвольным образом, ряд Фурье от этого не меняется).

2. Теорема о сходимости ряда Фурье. Функция $f(x)$ называется *кусочно-монотонной* на некотором промежутке, если этот промежуток можно разбить на конечное число промежутков, на каждом из которых она монотонна. Например, функция $f(x)=\operatorname{sign} x$, $x \in [-\pi; \pi]$, кусочно-монотонная: она постоянна на промежутках $[-\pi; 0[$, $]0; \pi]$. Функция $f(x)=|x|$, $x \in [-\pi; \pi]$, тоже кусочно-монотонная, так как она убывающая на отрезке $[-\pi; 0]$ и возрастающая на отрезке $[0; \pi]$.

Приведем без доказательства следующую теорему о сходимости ряда Фурье.

Теорема. *Если 2π-периодическая функция $f(x)$ ограничена и кусочно-монотонна на отрезке $[-\pi; \pi]$, то ряд Фурье этой функции сходится во всех точках $x \in \boldsymbol{R}$. Причем в точках непрерывности функции $f(x)$ он сходится к $f(x)$, а в точках разрыва — к $\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$.*

Другими словами, ограниченная 2π-периодическая функция, кусочно-монотонная на отрезке $[-\pi; \pi]$, разлагается в ряд Фурье во всех точках непрерывности.

Пример 1. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=\operatorname{sign} x$, $x \in [-\pi; \pi]$, и построить график суммы ряда Фурье.

Решение. В предыдущем пункте (см. пример 1) мы уже нашли ряд Фурье данной функции:

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)\pi} \sin(2k-1)x.$$

Данная функция не может быть продолжена периодически с периодом 2π на всю действительную прямую $\boldsymbol{R}$, так как $f(-\pi)=-1$, а $f(\pi)=1$. Однако, например, функцию $f(x)=\operatorname{sign} x$, $x \in [-\pi; \pi[$, уже можно периодически с периодом 2π продолжить на $\boldsymbol{R}$. К полученной

2π-периодической функции (ее график изображен на рис. 48) применим теорему о сходимости ряда Фурье. Из нее следует, что

$$\operatorname{sign} x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)\pi} \sin(2k-1)x$$

для любого $x \in]-\pi; \pi[$, так как на интервалах $]-\pi; 0[$ и $]0; \pi[$ данная функция непрерывна, а в точке $x=0$

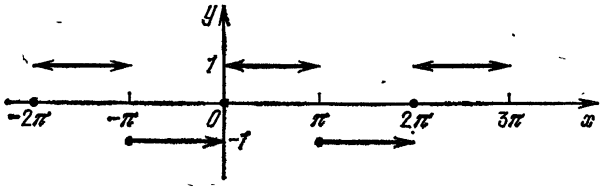


Рис. 48.

предел слева равен -1, а предел справа равен $+1$. Аналогично получаем, что

$$\operatorname{sign}(x-2\pi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)\pi} \sin(2k-1)x$$

для любого $x \in]\pi; 3\pi[$. И вообще,

$$\operatorname{sign}(x-2p\pi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)\pi} \sin(2k-1)x$$

для любого $x \in](2p-1)\pi; (2p+1)\pi[$, $p \in \boldsymbol{Z}$. В точках $x=(2p+1)\pi$ ряд сходится к 0. График суммы ряда Фурье данной функции изображен на рис. 49.

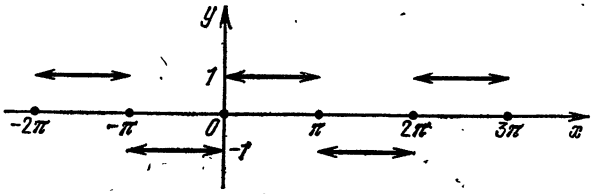


Рис. 49.

Пример 2. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=|x|$, $x \in [-\pi; \pi]$, и построить график суммы ряда Фурье.

Решение. В предыдущем пункте (см. пример 2) было показано, что

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.$$

Данная функция может быть продолжена периодически с периодом 2π на всю действительную прямую $\boldsymbol{R}$, так

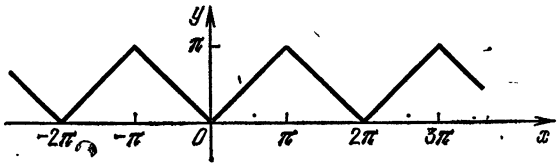


Рис. 50.

как $f(-\pi) = f(\pi) = \pi$. К продолженной 2π-периодической функции (рис. 50) применим теорему о сходимости ряда Фурье. Из нее следует, что

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}$$

для любого $x \in [-\pi; \pi]$. Следовательно, графиком суммы ряда Фурье будет график продолженной 2π-периодической функции (см. рис. 50).

Пример 3. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in [-\pi; 0], \\ \sin x, & \text{если } x \in [0; \pi], \end{cases}$$

и построить график суммы ряда Фурье.

Решение. По формулам для коэффициентов Фурье находим:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \sin x\,dx = \frac{2}{\pi};$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \sin x \sin nx\,dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\pi} (\cos(n-1)x - \cos(n+1)x)\,dx = 0, \quad n \geqslant 2;$$

$$b_1=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(1-\cos 2x)\,dx=\frac{1}{2};$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos nx\,dx=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(\sin(n+1)x-\sin(n-1)x)\,dx=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(-\frac{\cos(n+1)x}{n+1}+\frac{\cos(n-1)x}{n-1}\right)\Bigg|_0^{\pi}=\frac{(-1)^{n-1}-1}{\pi(n^2-1)},\quad n\geqslant 2;$$

$$a_1=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos x\,dx=0.$$

Следовательно,

$$f(x)\sim\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\sin x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}-1}{\pi(n^2-1)}\cos nx=$$

$$=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\sin x-\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2kx}{4k^2-1}.$$

Продолжим данную функцию на R периодически с периодом 2π. Полученная фуикция будет непрерывной на R и кусочно-монотонной на $[-\pi;\pi]$ (рис. 51). Из

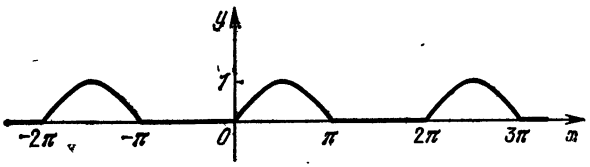


Рис. 51.

теоремы о сходимости ряда Фурье следует, что ряд Фурье данной функции сходится к продолженной 2π-периодической функции для любого $x\in R$.

3. Ряды Фурье для четных и нечетных функций. Прежде всего докажем следующее полезное утверждение.

Лемма. *Если интегрируемая функция* $f(x)$, $x\in[-l;\,l]$, *четная, то*

$$\int_{-l}^{l}f(x)\,dx=2\int_0^{l}f(x)\,dx,\qquad(1)$$

а если нечетная, то

$$\int_{-l}^{l} f(x)\,dx = 0. \tag{2}$$

Доказательство. Имеем

$$\int_{-l}^{l} f(x)\,dx = \int_{0}^{l} f(x)\,dx + \int_{-l}^{0} f(x)\,dx.$$

В последнем интеграле сделаем замену $x = -t$. Тогда

$$\int_{-l}^{0} f(x)\,dx = -\int_{l}^{0} f(-t)\,dt = \int_{0}^{l} f(-t)\,dt,$$

и поэтому

$$\int_{-l}^{l} f(x)\,dx = \int_{0}^{l} f(x)\,dx + \int_{0}^{l} f(-x)\,dx \tag{3}$$

(в последнем интеграле переменная интегрирования снова обозначена x).

Из формулы (3) следует, что если $f(x)$ четная, то справедливо равенство (1), а если нечетная, то — равенство (2). Лемма доказана.

Рассмотрим теперь четную функцию $f(x)$, $x \in [-\pi; \pi]$. Для нее, в силу доказанной леммы, имеем:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\,dx, \tag{4}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \tag{5}$$

$$b_n = 0,$$

так как для любого $n \in N$ функция $f(x)\cos nx$ четная, а функция $f(x)\sin nx$ нечетная. Следовательно, если функция $f(x)$ четная, то ее ряд Фурье содержит лишь свободный член и члены с $\cos nx$, т. е.

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

причем коэффициенты Фурье a_0 и a_n вычисляются по формулам (4), (5).

Для нечетной функции $f(x)$, $x \in [-\pi; \pi]$, получаем

$$a_0 = 0, \quad a_n = 0,$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx, \qquad (6)$$

так как функция $f(x) \cos nx$ нечетная, а функция $f(x) \sin nx$ четная. Следовательно, ряд Фурье нечетной функции $f(x)$ содержит лишь члены с $\sin nx$, т. е.

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

причем коэффициенты Фурье b_n вычисляются по формуле (6).

Функция $f(x) = \operatorname{sign} x$, $x \in [-\pi; \pi]$, рассмотренная в примере 1 предыдущего пункта, является нечетной, поэтому ее ряд Фурье содержит лишь члены с $\sin nx$. Функция $f(x) = |x|$, $x \in [-\pi; \pi]$, рассмотренная в примере 2 п. 2, является четной, и поэтому ее ряд Фурье содержит лишь свободный член и члены с $\cos nx$.

Иногда требуется некоторую функцию $f(x)$, определенную на отрезке $[-\pi; 0]$ или на отрезке $[0; \pi]$, разложить в ряд Фурье только по косинусам или только по синусам. Если данную функцию продолжим на отрезок $[-\pi; \pi]$ четным образом, то ряд Фурье полученной четной функции не будет содержать членов с синусами. Если же данную функцию продолжим на отрезок $[-\pi; \pi]$ нечетным образом, то ряд Фурье полученной функции будет содержать только члены с синусами.

Пример 1. Разложить в ряд Фурье по косинусам функцию $f(x) = \sin x$, $x \in [0; \pi]$.

Решение. Продолжим данную функцию на отрезок $[-\pi; \pi]$ четным образом и найдем коэффициенты Фурье полученной функции.

Прежде всего заметим, что получим функцию $|\sin x|$, $x \in \boldsymbol{R}$. Далее, так как эта функция четная, то $b_n = 0$ для любого $n \in \boldsymbol{N}$ и

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \, dx = \frac{4}{\pi},$$

$$a_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cos x \, dx = 0,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \cos nx\, dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (\sin(n+1)x - \sin(n-1)x)\, dx = \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^{n-1}-1}{n^2-1},\ n \geqslant 2.$$

Из теоремы о сходимости ряда Фурье следует, что

$$|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2kx}{4k^2-1}$$

для любого $x \in \boldsymbol{R}$.

Пример 2. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = x$, $x \in [-\pi; 0]$: а) по косинусам; б) по синусам.

Решение. Чтобы разложить данную функцию по косинусам, необходимо ее продолжить на $[0; \pi]$ четным образом. Таким продолжением будет функция $f(x) = |x|$, $x \in [-\pi; \pi]$. В примере 2 предыдущего пункта было найдено разложение в ряд Фурье этой функции. Именно,

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}$$

для любого $x \in [-\pi; 0]$.

Нечетным продолжением данной функции будет функция $f(x) = x$, $x \in [-\pi; \pi]$. Для нее имеем: $a_0 = 0$ и $a_n = 0$ для любого $n \in \boldsymbol{N}$.

Найдем коэффициенты b_n:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \sin nx\, dx =$$

$$= -\frac{2}{\pi} x \frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi} + \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi} \cos nx\, dx = (-1)^{n+1}\frac{2}{n}.$$

Из теоремы о сходимости ряда Фурье следует, что

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{2}{n}\sin nx$$

для любого $x \in]-\pi; \pi[$. В точках $-\pi$ и π этот ряд сходится к 0, так как все его члены равны 0. (Это сле-

дует и из теоремы о сходимости ряда Фурье.) График суммы этого ряда изображен на рис. 52.

4. Разложение функций, заданных на отрезке вида $[a; a+2\pi]$. Заметим, что любую 2π-периодическую функцию достаточно задать на некотором отрезке длины 2π. В остальных точках она будет определена в силу периодичности. Найдем формулы, выражающие коэффициенты Фурье этой функции через ее значения на произвольном

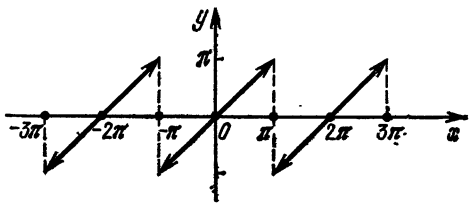


Рис. 52.

отрезке длины 2π, т. е. на произвольном отрезке вида $[a; a+2\pi]$. Предварительно докажем следующее общее утверждение.

Лемма. *Если ограниченная функция $f(x)$ с периодом $T > 0$ имеет конечное число точек разрыва на любом промежутке длины T, то*

$$\int_0^T f(x)\,dx = \int_a^{a+T} f(x)\,dx$$

для любого $a \in R$.

Доказательство. Имеем

$$\int_0^T f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_a^{a+T} f(x)\,dx + \int_{a+T}^T f(x)\,dx.$$

Преобразуем последний интеграл:

$$\int_{a+T}^T f(x)\,dx = -\int_T^{a+T} f(x)\,dx = -\int_0^a f(x+T)\,dx = -\int_0^a f(x)\,dx.$$

Следовательно, интегралы от 0 до a и от $a+T$ до T в сумме дают нуль. Лемма доказана.

Пусть теперь $f(x)$ — 2π-периодическая функция, а a_0, a_n, b_n — ее коэффициенты Фурье. Из леммы следует, что

значение интеграла от $f(x)$ по любому отрезку $[a;\ a+2\pi]$ длины 2π одно и то же, поэтому

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x)\,dx. \tag{1}$$

Аналогично,

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x)\cos nx\,dx, \tag{2}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x)\sin nx\,dx \tag{3}$$

для любого $a\in R$, так как функции $f(x)\cos nx$ и $f(x)\sin nx$ периодические с периодом 2π.

Пусть на отрезке $[a;\ a+2\pi]$ длины 2π задана функция $f(x)$. Продолжим ее периодически с периодом 2π на всю числовую прямую R (может быть, для этого придется изменить значение $f(x)$ в одной или обеих точках a и $a+2\pi$). Ряд Фурье полученной 2π-периодической функции называется рядом Фурье данной функции $f(x)$, $x\in[a;\ a+2\pi]$. В этом случае коэффициенты Фурье естественно вычислять по формулам (1), (2), (3).

Пример 1. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x)=\operatorname{sign}x,\quad x\in\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\right],$$

и построить график суммы ряда Фурье.

Решение. По формулам (1), (2), (3) находим:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{3\pi/2} f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{0}(-1)\,dx+\frac{1}{\pi}\int_0^{3\pi/2} dx=1,$$

$$a_n=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{0}\cos nx\,dx+\frac{1}{\pi}\int_0^{3\pi/2}\cos nx\,dx=$$

$$=\frac{-\sin nx}{n\pi}\Big|_{-\pi/2}^{0}+\frac{\sin nx}{n\pi}\Big|_0^{3\pi/2}=-\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2},$$

$$b_n=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{0}\sin nx\,dx+\frac{1}{\pi}\int_0^{3\pi/2}\sin nx\,dx=$$

$$=\frac{\cos nx}{n\pi}\Big|_{-\pi/2}^{0}-\frac{\cos nx}{n\pi}\Big|_0^{3\pi/2}=\frac{2}{n\pi}\left(1-\cos\frac{n\pi}{2}\right).$$

Изменим значение $f(x)$ в точке $x=\frac{3\pi}{2}$, положив $f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-1$, и продолжим эту функцию периодически с периодом 2π на всю числовую прямую $\boldsymbol{R}$. Из теоремы о сходимости ряда Фурье следует, что ряд Фурье данной функции сходится к $\operatorname{sign} x$ для любого $x\in\left]-\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\right[$, а в точках $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{3\pi}{2}$ сходится к 0. График суммы ряда Фурье изображен на рис. 53.

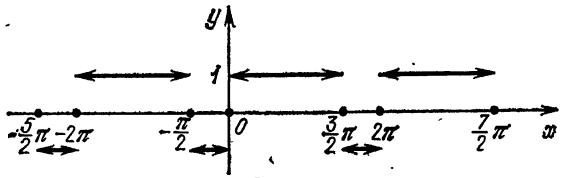


Рис. 53.

Пример 2. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=x^2$, $x\in[0;\ 2\pi]$.

Решение. По формулам (1), (2), (3) находим:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2\,dx=\frac{1}{3\pi}(2\pi)^3=\frac{8}{3}\pi^2,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}x^2\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{2\pi}-\frac{2}{n\pi}\int_0^{2\pi}x\sin nx\,dx=$$

$$=\frac{2}{n\pi}x\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{2\pi}-\frac{2}{n^2\pi}\int_0^{2\pi}\cos nx\,dx=\frac{4}{n^2},$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}x^2\frac{-\cos nx}{n}\Big|_0^{2\pi}+\frac{2}{n\pi}\int_0^{2\pi}x\cos nx\,dx=$$

$$=-\frac{4\pi}{n}+\frac{2}{n\pi}x\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{2\pi}-\frac{2}{n^2\pi}\int_0^{2\pi}\sin nx\,dx=-\frac{4\pi}{n}.$$

Таким образом,

$$f(x)\sim\frac{4}{3}\pi^2+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^2}\cos nx-\frac{4\pi}{n}\sin nx\right).$$

Изменим значение $f(x)$ в точке $x=2\pi$, положив $f(2\pi)=0$, и продолжим эту функцию периодически с периодом 2π на всю числовую прямую. Продолженная функция будет разрывной в точках $x=2p\pi$, $p\in Z$, а в остальных точках — непрерывной.

Кроме того, она возрастающая на $[0;\ 2\pi[$. Следовательно, в силу теоремы о сходимости ряда Фурье

$$x^2=\frac{4}{3}\pi^2+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^2}\cos nx-\frac{4\pi}{n}\sin nx\right)$$

для любого $x\in\,]0;\ 2\pi[$, а в точках $x=0$ и $x=2\pi$ этот ряд сходится к $\frac{1}{2}(2\pi)^2=2\pi^2$.

Упражнения

10.1. Найдите ряд Фурье следующих функций:

а) $f(x)=\begin{cases}2, & \text{если } x\in[-\pi;\ 0[,\\ 5, & \text{если } x\in[0;\ \pi];\end{cases}$

б) $f(x)=\cos^2 x;\quad x\in[-\pi;\ \pi]$;

в) $f(x)=\begin{cases}2x, & \text{если } x\in[-\pi;\ 0[,\\ 0, & \text{если } x\in[0;\ \pi].\end{cases}$

10.2. Разложите в ряд Фурье следующие функции (в каждом случае постройте график суммы полученного ряда):

а) $f(x)=\sin\frac{x}{2},\quad x\in[-\pi;\ \pi]$;

б) $f(x)=(\sin x+\cos x)^2,\quad x\in[-\pi;\ \pi]$;

в) $f(x)=\begin{cases}\pi, & \text{если } x\in\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right],\\ -\pi, & \text{если } x\in\left]-\pi;\ -\frac{\pi}{2}\right[\ \cup\ \left]\frac{\pi}{2};\ \pi\right[;\end{cases}$

г) $f(x)=x^2,\quad x\in[-\pi;\ \pi]$.

10.3. Разложите в ряд Фурье по косинусам следующие функции:

а) $f(x)=\begin{cases}1, & \text{если } x\in[0;\ 1],\\ 0, & \text{если } x\in\,]1;\ \pi];\end{cases}$

б) $f(x)=\begin{cases}1-\frac{x}{2}, & \text{если } x\in[0;\ 2[,\\ 0, & \text{если } x\in[2;\ \pi[;\end{cases}$

в) $f(x)=3x^2-6\pi x+2\pi^2,\quad x\in[0;\ \pi]$.

10.4. Разложите в ряд Фурье по синусам следующие функции:

а) $f(x)=\cos x,\quad x\in\,]0;\ \pi[$;

б) $f(x)=\sin\frac{x}{2},\quad x\in[0;\ \pi[$;

в) $f(x)=x(\pi-x)$, $x\in[0;\ \pi]$.

10.5. Разложите в ряд Фурье следующие 2π-периодические функции:

а) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi-x}{2}, & \text{если } x\in]0;\ 2\pi[,\\ 0, & \text{если } x=0;\end{cases}$

б) $f(x)=\begin{cases}x, & \text{если } x\in]1;\ 1+2\pi[,\\ 1+\pi, & \text{если } x=1.\end{cases}$

§ 35. Ряды Фурье для периодических функций с произвольным периодом $T=2l$, $l>0$

1. Определение ряда Фурье. Любая периодическая функция $f(x)$ с периодом $T=2l$, $l>0$, заменой $x=\frac{l}{\pi}t$ преобразуется в функцию $\varphi(t)=f\left(\frac{l}{\pi}t\right)$ с периодом 2π. Действительно,

$$\varphi(t+2\pi)=f\left(\frac{l}{\pi}(t+2\pi)\right)=f\left(\frac{l}{\pi}t+2l\right)=f\left(\frac{l}{\pi}t\right)=\varphi(t).$$

Если же функция $f(x)$ задана только на отрезке $[-l;\ l]$, $l>0$, то функция $\varphi(t)$ будет задана только на отрезке $[-\pi;\ \pi]$.

Напишем ряд Фурье для функции $\varphi(t)$:

$$\varphi(t)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt).$$

Отсюда, после замены $t=\frac{\pi}{l}x$, получаем соответствующий тригонометрический ряд для функции $f(x)$:

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right).$$

Этот ряд называется *рядом Фурье функции* $f(x)$. Для коэффициентов a_0, a_n, b_n, которые, как и раньше, называются *коэффициентами Фурье* функции $f(x)$, получаются следующие формулы:

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\,dx, \qquad (1)$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx, \tag{2}$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx. \tag{3}$$

Действительно,

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}t\right)dt = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{l}{\pi}t\right)\cos nt\,dt = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx,$$

где сделана замена $t = \frac{\pi}{l}x$. Аналогично доказывается и формула (3).

Из теоремы о сходимости ряда Фурье для 2π-периодической функции следует соответствующая теорема о сходимости ряда Фурье для функции с произвольным периодом.

Теорема. *Если $2l$-периодическая функция $f(x)$ ограничена и кусочно-монотонна на отрезке $[-l;\ l]$, $l>0$, то ее ряд Фурье сходится к $\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$ в любой точке $x\in R$. В частности, в точках непрерывности функции ряд сходится к $f(x)$.*

Пример 1. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x\in[-1;\ 0[, \\ 1, & \text{если } x\in[0;\ 1], \end{cases}$$

и построить график суммы этого ряда.

Решение. По формулам (1), (2), (3), в которых для данной функции $l=1$, получаем:

$$a_0 = \int_0^1 dx = 1,$$

$$a_n = \int_0^1 \cos n\pi x\,dx = 0,$$

$$b_n = \int_0^1 \sin n\pi x\,dx = -\frac{\cos n\pi x}{n\pi}\Big|_0^1 = \frac{1}{n\pi}(1-\cos n\pi).$$

Из последнего равенства следует, что если n четное, то $b_n=0$, т. е. $b_{2k}=0$, а если n нечетное, то $b_n=\frac{2}{n\pi}$, т. е. $b_{2k-1}=\frac{2}{(2k-1)\pi}$.

Следовательно,

$$f(x)\sim\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{(2k-1)\pi}\sin(2k-1)\pi x.$$

Из теоремы о сходимости ряда Фурье следует, что полученный ряд сходится к данной функции для любого x

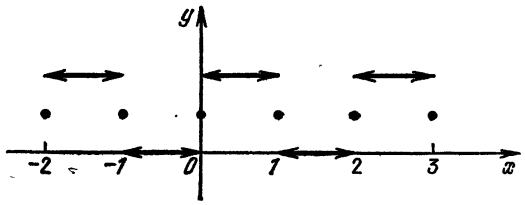


Рис. 54.

из интервала $]-1;\ 1[$, кроме $x=0$. Легко видеть, что в точках $x=0$, $x=-1$, $x=1$ он сходится к $\frac{1}{2}$. График суммы ряда Фурье данной функции изображен на рис. 54.

Пример 2. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x)=\cos x,\quad x\in\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right],$$

и построить график суммы этого ряда.

Решение. По формулам (1), (2), (3), в которых для данной функции $l=\frac{\pi}{2}$, получаем:

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos x\,dx=\frac{2}{\pi}\sin x\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}=\frac{4}{\pi},$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos x\cos 2nx\,dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\cos(2n+1)x+\cos(2n-1)x)\,dx=$$

$$= \frac{1}{\pi} \frac{2\sin(2n+1)\frac{\pi}{2}}{2n+1} + \frac{1}{\pi} \frac{2\sin(2n-1)\frac{\pi}{2}}{2n-1} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n-1}\right)\cos n\pi = \frac{4}{\pi}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}.$$

Данная функция четная, и поэтому $b_n = 0$ для любого $n \in \boldsymbol{N}$.

Продолжим данную функцию периодически с периодом π на всю действительную прямую $\boldsymbol{R}$. Продолженной

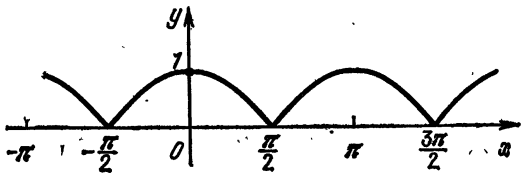


Рис. 55.

функцией будет $|\cos x|$, $x \in \boldsymbol{R}$. Она, очевидно, будет непрерывной на $\boldsymbol{R}$ и кусочно-монотонной на $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Следовательно, в силу теоремы о сходимости ряда Фурье

$$|\cos x| = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}\cos 2nx$$

для любого $x \in \boldsymbol{R}$. График этой функции изображен на рис. 55.

2. Ряды Фурье для четных и нечетных функций. Если функция $f(x)$, $x \in [-l; l]$, где $l > 0$, четная, то, очевидно, функция $f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}$ четная, а функция $f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}$ нечетная, и поэтому (см. лемму из п. 3 § 34)

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\,dx, \tag{1}$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx \tag{2}$$

и $b_n = 0$ для любого $n \in \boldsymbol{N}$.

Аналогично, если функция $f(x)$, $x \in [-l; l]$, нечетная, то функция $f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}$ нечетная, а функция $f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}$

четная, и поэтому $a_0 = 0$, $a_n = 0$ и

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} \, dx \qquad (3)$$

для любого $n \in N$.

Следовательно, если функция $f(x)$, $x \in [-l; l]$, четная, то

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l},$$

где коэффициенты a_0 и a_n вычисляются по формулам (1), (2).

Если же $f(x)$ нечетная, то

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l},$$

где b_n вычисляется по формуле (3).

Пример 1. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = x$, $x \in [-1; 1]$.

Решение. Данная функция является нечетной, поэтому $a_0 = 0$ и $a_n = 0$ для любого $n \in N$. Далее,

$$b_n = 2 \int_0^1 x \sin n\pi x \, dx =$$

$$= -2x \frac{\cos n\pi x}{n\pi} \Big|_0^1 + \frac{2}{n\pi} \int_0^1 \cos n\pi x \, dx =$$

$$= -\frac{2}{n\pi} \cos n\pi = \frac{2}{n\pi} (-1)^{n+1}.$$

Следовательно,

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{n\pi} \sin n\pi x.$$

Из теоремы о сходимости ряда Фурье следует, что

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{n\pi} \sin n\pi x$$

для любого $x \in]-1; 1[$. В точках $x=-1$ и $x=1$ этот ряд сходится к 0.

Пример 2. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x)=x^2, \quad x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right].$$

Решение. Данная функция четная, поэтому $b_n=0$ для любого $n \in N$. Далее,

$$a_0=4\int_0^{1/2} x^2 dx=4\frac{x^3}{3}\Big|_0^{1/2}=\frac{1}{6},$$

$$a_n=4\int_0^{1/2} x^2\cos 2n\pi x\,dx=$$

$$=4x^2\frac{\sin 2n\pi x}{2n\pi}\Big|_0^{1/2}-\frac{2}{n\pi}\int_0^{1/2} 2x\sin 2n\pi x\,dx=$$

$$=\frac{4}{n\pi}x\frac{\cos 2n\pi x}{2n\pi}\Big|_0^{1/2}+\frac{2}{(n\pi)^2}\int_0^{1/2}\cos 2n\pi x\,dx=$$

$$=\frac{\cos n\pi}{(n\pi)^2}=\frac{(-1)^n}{(n\pi)^2}.$$

Следовательно,

$$f(x)\sim\frac{1}{12}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n\pi)^2}\cos 2n\pi x.$$

Из теоремы о сходимости ряда Фурье следует, что

$$x^2=\frac{1}{12}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n\pi)^2}\cos 2n\pi x$$

для любого $x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

3. Разложение функций, заданных на отрезке вида $[a; a+2l]$. Из леммы п. 4 § 34 следует, что интеграл от периодической функции с периодом $T=2l$ по любому отрезку длины $2l$ один и тот же. Поэтому для коэффициентов Фурье периодической функции $f(x)$ с периодом

$T=2l$ справедливы формулы:

$$a_0=\frac{1}{l}\int_a^{a+2l} f(x)\,dx, \tag{1}$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_a^{a+2l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx, \tag{2}$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_a^{a+2l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx, \tag{3}$$

где a — произвольное действительное число.

Пусть на отрезке $[a;\ a+2l]$ длины $2l>0$ задана функция $f(x)$. Продолжим ее периодически с периодом $2l$ на всю числовую прямую $\boldsymbol{R}$ (может быть, для этого придется изменить значение $f(x)$ в точках a и $a+2l$). Ряд Фурье полученной периодической функции называется рядом Фурье данной функции $f(x)$, $x\in[a;\ a+2l]$. В этом случае коэффициенты Фурье следует вычислять по формулам (1), (2), (3).

Пример. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=x$, $x\in[0;\ 1]$ и построить график суммы этого ряда.

Решение. По формулам (1), (2), (3), в которых для данной функции $a=0$ и $l=\frac{1}{2}$, получаем:

$$a_0=2\int_0^1 x\,dx=1,$$

$$a_n=2\int_0^1 x\cos 2n\pi x\,dx=2x\frac{\sin 2n\pi x}{2n\pi}\Big|_0^1-\frac{1}{n\pi}\int_0^1\sin 2n\pi x\,dx=0,$$

$$b_n=2\int_0^1 x\sin 2n\pi x\,dx=$$

$$=-2x\frac{\cos 2n\pi x}{2n\pi}\Big|_0^1+\frac{1}{n\pi}\int_0^1\cos 2n\pi x\,dx=-\frac{1}{n\pi}.$$

Следовательно,

$$f(x)\sim\frac{1}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2n\pi x}{n\pi}.$$

Из теоремы о сходимости ряда Фурье следует, что

$$x=\frac{1}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2n\pi x}{n\pi}$$

для любого $x\in\,]0;\ 1[$. В точках $x=0$ и $x=1$ полученный

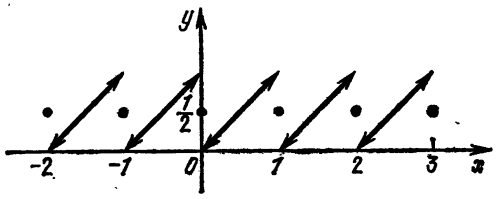


Рис. 56.

ряд сходится к $\frac{1}{2}$. График суммы ряда Фурье данной функции изображен на рис. 56.

Упражнения

10.6. Разложите в ряд Фурье следующие функции (в каждом случае постройте график суммы полученного ряда):

а) $f(x)=|x|,\quad x\in[-1;\ 1]$;

б) $f(x)=\begin{cases} x, & \text{если } x\in[0;\ 1[,\\ 2-x, & \text{если } x\in[1;\ 2]; \end{cases}$

в) $f(x)=\begin{cases} A, & \text{если } x\in\,]0;\ l[,\\ 0, & \text{если } x\in\,]l;\ 2l[; \end{cases}$

г) $f(x)=\begin{cases} x, & \text{если } x\in[0;\ 1[,\\ 1, & \text{если } x\in[1;\ 2[,\\ 3-x, & \text{если } x\in[2;\ 3]. \end{cases}$

10.7. Разложите в ряд Фурье по синусам функцию

$$f(x)=\begin{cases} x, & \text{если } x\in[0;\ 1[,\\ 2-x, & \text{если } x\in[1;\ 2]. \end{cases}$$

10.8. Разложите в ряд Фурье периодическую с периодом $T=1$ функцию

$$f(x)=\begin{cases} 1-x, & \text{если } x\in\,]0;\ 1[,\\ 0{,}5, & \text{если } x=0. \end{cases}$$

10.9. Разложите в ряд Фурье периодическую с периодом $T=10$ функцию

$$f(x)=\begin{cases} 10-x, & \text{если } x\in\,]5;\ 15[,\\ 0, & \text{если } x=5. \end{cases}$$

10.10. Разложите в ряд Фурье периодическую с периодом $T=4$ функцию

$$f(x)=\begin{cases} x, & \text{если } x\in[0;\ 1[,\\ 1, & \text{если } x\in[1;\ 2[,\\ 3-x, & \text{если } x\in[2;\ 3[,\\ 0, & \text{если } x\in[3;\ 4[. \end{cases}$$

§ 36. Комплексная форма рядов Фурье

1. Ряды Фурье для функций с периодом 2π. Пусть $f(x)$ — периодическая функция с периодом $T=2\pi$, интегрируемая на отрезке $[-\pi;\ \pi]$. Напишем ее ряд Фурье:

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx), \tag{1}$$

и преобразуем общий член этого ряда.

Из формулы Эйлера (см. гл. I, § 3, п. 6)

$$e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$$

следует, что

$$e^{-i\varphi}=\cos\varphi-i\sin\varphi.$$

Из этих равенств, как из системы двух линейных уравнений относительно $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$, находим, что

$$\cos\varphi=\frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}, \tag{2}$$

$$\sin\varphi=\frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i} \tag{3}$$

для любого $\varphi\in R$. Полученные формулы также называются *формулами Эйлера*.

Преобразуем общий член ряда Фурье (1) функции $f(x)$ с помощью формул Эйлера (2), (3):

$$a_n\cos nx+b_n\sin nx=$$

$$=a_n\frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2}+b_n\frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i}=$$

$$=a_n\frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2}-ib_n\frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2}=$$

$$=\frac{a_n-ib_n}{2}e^{inx}+\frac{a_n+ib_n}{2}e^{-inx}.$$

Введем обозначения:

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}, \tag{4}$$

где $n \in N$. Тогда для N-й частичной суммы ряда (1) получим выражение

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) =$$

$$= c_0 + \sum_{n=1}^{N} (c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}) =$$

$$= c_0 + c_1 e^{ix} + c_{-1} e^{-ix} + \ldots + c_N e^{iNx} + c_{-N} e^{-iNx}.$$

Переставив местами слагаемые, окончательно получим

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) =$$

$$= c_{-N} e^{-iNx} + \ldots + c_{-1} e^{-ix} + c_0 + c_1 e^{ix} + \ldots + c_N e^{iNx} =$$

$$= \sum_{p=-N}^{N} c_p e^{ipx}$$

(здесь суммирование идет по всем целым p от $-N$ до N).

Из теоремы о сходимости ряда Фурье следует, что если функция $f(x)$ на отрезке $[-\pi; \pi]$ ограничена и кусочно-монотонна, а в точке x непрерывна, то

$$f(x) = \lim_{N \to \infty} \sum_{p=-N}^{N} c_p e^{ipx}.$$

В этом случае будем писать

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_p e^{ipx}.$$

Выразим коэффициенты c_p через функцию $f(x)$. Имеем: если $p = 0$, то

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx;$$

если $p=n>0$, то

$$c_p=\frac{a_n-ib_n}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)(\cos nx-i\sin nx)\,dx=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-ipx}\,dx;$$

если же $p=-n<0$, то

$$c_p=\frac{a_n+ib_n}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{inx}\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-ipx}\,dx.$$

Таким образом, для любого целого p справедлива формула

$$c_p=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-ipx}\,dx. \tag{5}$$

Коэффициенты c_p, определяемые по формуле (5), называются *комплексными коэффициентами Фурье функции* $f(x)$, а выражение

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}c_pe^{ipx}$$

называется *комплексной формой ряда Фурье функции* $f(x)$.

Заметим, что коэффициенты Фурье, а следовательно и ряд Фурье, можно написать для любой функции, определенной и интегрируемой на отрезке $[-\pi;\pi]$. Вообще, любую функцию $f(x)$, определенную на произвольном отрезке $[a;\ a+2\pi]$ длины 2π, после видоизменения ее значений в точках a и $a+2\pi$ так, чтобы $f(a)=f(a+2\pi)$, можно продолжить периодически с периодом 2π на всю действительную прямую $\boldsymbol{R}$. Ряд Фурье полученной 2π-периодической функции называется рядом Фурье данной функции. Так как интеграл от 2π-периодической функции по любому отрезку длины 2π один и тот же, то коэффициенты Фурье функции $f(x)$, заданной на отрезке $[a;\ a+2\pi]$, естественно вычислять по формуле

$$c_p=\frac{1}{2\pi}\int_{a}^{a+2\pi}f(x)e^{-ipx}\,dx. \tag{6}$$

Пример 1. Написать ряд Фурье в комплексной форме функции $f(x)=\operatorname{sign} x$, $x\in[-\pi;\ \pi]$.

Решение. Коэффициенты Фурье и ряд Фурье данной функции были найдены в примере 1 п. 1 § 34. Поэтому по формулам (4) находим:

$$c_0=0,\ c_n=-\frac{i}{2}\cdot\frac{2}{n\pi}(1-(-1)^n)=\frac{-i}{n\pi}(1-(-1)^n),$$
$$c_{-n}=\frac{i}{n\pi}(1-(-1)^n).$$

Следовательно, $c_p=0$ для четных p и $c_p=-\frac{2i}{p\pi}$ для нечетных целых p, и поэтому

$$f(x)\sim-\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{2i}{(2k+1)\pi}e^{i(2k+1)x},$$

где суммирование идет по всем целым k от $-\infty$ до $+\infty$.

Из теоремы о сходимости ряда Фурье следует, что

$$\operatorname{sign} x=-\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{2i}{(2k+1)\pi}e^{i(2k+1)x}$$

для любого x из интервала $]-\pi;\ \pi[$. Отметим, что, согласно определению, это равенство означает:

$$\operatorname{sign} x=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=-n}^{n}\frac{-2i}{(2k+1)\pi}e^{i(2k+1)x}$$

для любого $x\in]-\pi;\ \pi[$.

Пример 2. Найти комплексные коэффициенты Фурье функции

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x\in[-\pi;\ 0],\\ \sin x, & \text{если } x\in[0;\ \pi].\end{cases}$$

Решение. Коэффициенты Фурье данной функции были найдены в примере 3 п. 2 § 34, и поэтому для нахождения комплексных коэффициентов Фурье c_p можно воспользоваться соответствующими значениями для a_0, a_n, b_n. Однако найдем c_p непосредственно по формуле (5).

Имеем

$$c_p = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,e^{-ipx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} \sin x e^{-ipx}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\,e^{-ipx}\,dx = \frac{1}{4\pi i}\int_{0}^{\pi} \left(e^{i(1-p)x} - e^{-i(1+p)x}\right)dx.$$

В частности,

$$c_0 = \frac{1}{4\pi i}\int_{0}^{\pi} (e^{ix}-e^{-ix})\,dx = \frac{1}{4\pi i}\left(\frac{e^{ix}}{i}+\frac{e^{-ix}}{i}\right)\Big|_0^{\pi}.$$

Так как

$$e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1,$$
$$e^{-i\pi} = \cos\pi - i\sin\pi = -1,$$

то

$$c_0 = \frac{1}{4\pi i}\left(\frac{-2}{i}-\frac{2}{i}\right) = \frac{1}{\pi}.$$

Если $p=1$, то

$$c_1 = \frac{1}{4\pi i}\int_{0}^{\pi} (1-e^{-2ix})\,dx = \frac{1}{4i} - \frac{1}{4\pi i}\int_{0}^{\pi} e^{-2ix}\,dx = \frac{1}{4i}.$$

Аналогично,

$$c_{-1} = \frac{1}{4\pi i}\int_{0}^{\pi} (e^{2ix}-1)\,dx = \frac{-1}{4i}.$$

Пусть теперь $|p| \neq 1$; тогда

$$c_p = \frac{1}{4\pi i}\frac{e^{i(1-p)x}}{i(1-p)}\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{4\pi i}\frac{e^{-i(1+p)x}}{i(1+p)}\Big|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{\cos(1-p)\pi - 1}{-4\pi(1-p)} + \frac{\cos(1+p)\pi - 1}{-4\pi(1+p)} = \frac{1-(-1)^{1-p}}{4\pi(1-p)} + \frac{1-(-1)^{1+p}}{4\pi(1+p)}.$$

Отсюда видно, что если p нечетное и $|p| \neq 1$, то $c_p = 0$, а если p четное, то

$$c_p = \frac{2}{4\pi(1-p)} + \frac{2}{4\pi(1+p)} = \frac{1}{\pi(1-p^2)}.$$

Таким образом,

$$c_p = \frac{1}{\pi(1-p^2)}, \text{ если } p \text{ четное},$$

$$c_p = 0, \quad \text{если } p \text{ нечетное и } |p| \neq 1,$$

$$c_p = -\frac{pi}{4}, \quad \text{если } |p| = 1.$$

Пример 3. Разложить в ряд Фурье (в комплексной форме) функцию $f(x) = x^2$, $x \in [0; 2\pi]$.

Решение. По формуле (6) находим

$$c_p = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x^2 e^{-ipx}\, dx.$$

Следовательно, если $p = 0$, то

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x^2\, dx = \frac{1}{2\pi} \frac{(2\pi)^3}{3} = \frac{4\pi^2}{3}.$$

Если же $p \neq 0$, то, интегрируя по частям, получаем

$$c_p = \frac{1}{2\pi} x^2 \frac{e^{-ipx}}{-ip}\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{2\pi pi} \int_0^{2\pi} 2xe^{-ipx}\, dx =$$

$$= -\frac{2\pi}{ip} e^{-ip2\pi} + \frac{1}{p\pi i} \int_0^{2\pi} xe^{-ipx}\, dx =$$

$$= \frac{2\pi i}{p} + \frac{1}{p\pi i} x \frac{e^{-ipx}}{-ip}\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{p^2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ipx}\, dx = \frac{2\pi i}{p} + \frac{2}{p^2}.$$

Таким образом,

$$f(x) \sim \frac{4}{3}\pi^2 + \sum_{\substack{p=-\infty \\ p \neq 0}}^{+\infty} \frac{2}{p} \left(\frac{1}{p} + \pi i\right) e^{ipx}.$$

Из теоремы о сходимости ряда Фурье следует, что ряд Фурье данной функции сходится к x^2 для любого x из интервала $]0; 2\pi[$.

2. Ряды Фурье для функций с произвольным периодом $T = 2l$. Пусть функция $f(x)$ периодическая с периодом $T = 2l$ и интегрируемая на отрезке $[-l; l]$. Как и для

2π-периодических функций, выражение

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} c_p e^{i\frac{p\pi x}{l}},$$

где коэффициенты c_p находятся по формуле

$$c_p = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\, e^{-i\frac{p\pi x}{l}}\, dx, \qquad (1)$$

называется *комплексной формой ряда Фурье периодической функции* $f(x)$ *с периодом* $T = 2l$. Коэффициенты c_p называются *комплексными коэффициентами Фурье функции* $f(x)$.

Заметим, что любую функцию $f(x)$, определенную на произвольном отрезке $[a;\ a+T]$ длины $T > 0$, после видоизменения ее значений в точках a и $a+T$ так, чтобы $f(a) = f(a+T)$, можно продолжить периодически с периодом T на всю действительную прямую $\boldsymbol{R}$. Ряд Фурье полученной периодической функции с периодом T называется рядом Фурье данной функции. Коэффициенты Фурье функции $f(x)$, $x \in [a;\ a+T]$, естественно вычислять по формуле

$$c_p = \frac{1}{T}\int_{a}^{a+T} f(x)\, e^{-i\frac{2p\pi x}{T}}\, dx. \qquad (2)$$

Пример 1. Найти комплексные коэффициенты Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in [-1;\ 0[, \\ 1, & \text{если } x \in [0;\ 1]. \end{cases}$$

Решение. По формуле (1) находим:

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{0}^{1} dx = \frac{1}{2},$$

$$a_p = \frac{1}{2}\int_{0}^{1} e^{-ip\pi x}\, dx = \frac{1}{2}\,\frac{e^{-ip\pi x}}{-ip\pi}\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{i}{2p\pi}\left(e^{ip\pi} - 1\right) = \frac{i}{2p\pi}\left((-1)^p - 1\right)$$

для $p \neq 0$. Следовательно, $c_0 = \frac{1}{2}$, $c_p = 0$ для четных $p \neq 0$ и $c_p = \frac{-i}{p\pi}$ для нечетных p.

Пример 2. Разложить в ряд Фурье (в комплексной форме) функцию $f(x) = x$, $x \in [0; 1]$.

Решение. По формуле (2), в которой для данной функции $a = 0$ и $T = 1$, находим:

$$c_0 = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2},$$

$$c_p = \int_0^1 xe^{-i2p\pi x}\,dx = x\frac{e^{-i2p\pi x}}{-i2p\pi}\Bigg|_0^1 + \frac{1}{i2p\pi}\int_0^1 e^{-i2p\pi x}\,dx = \frac{e^{-2p\pi i}}{-2p\pi i} = \frac{1}{-2p\pi i} = \frac{i}{2p\pi}$$

для $p \neq 0$. Следовательно,

$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \sum_{\substack{p=-\infty \\ p \neq 0}}^{+\infty} \frac{i}{2p\pi} e^{i2p\pi x}.$$

Из теоремы о сходимости ряда Фурье следует, что ряд Фурье данной функции сходится к x для любого $x \in]0; 1[$. В точках $x = 0$ и $x = 1$ он сходится к $\frac{1}{2}$.

Упражнения

10.11. Разложите в ряд Фурье (в комплексной форме) функцию

$$f(x) = e^x, \quad x \in]-\pi; \pi[.$$

Найдите значение суммы $s(x)$ полученного ряда при $x = \pi$.

10.12. Разложите в ряд Фурье (в комплексной форме) периодическую с периодом $T = \pi$ функцию

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{если } x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[, \\ 0, & \text{если } x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right[, \\ \frac{1}{2}, & \text{если } x = \pi. \end{cases}$$

10.13. Разложите в ряд Фурье (в комплексной форме) периодическую с периодом $T = 3$ функцию

$$f(x) = \begin{cases} A, & \text{если } x \in]0; 1[, \\ \frac{A}{2}, & \text{если } x = 0; 1, \\ 0, & \text{если } x \in]1; 3[. \end{cases}$$

ОТВЕТЫ

ГЛАВА I

1.1. а) $z_1+z_2=3+7i$, $z_1z_2=-22+7i$; б) $z_1+z_2=2-4i$, $z_1z_2=-1{,}81-5{,}2i$; в) $z_1+z_2=-8-10i$, $z_1z_2=21-24i$; г) $z_1+z_2=10$, $z_1z_2=28$. **1.2.** а) $z_2-z_1=-2i$, $\frac{z_2}{z_1}=-i$; б) $z_2-z_1=4-2i$, $\frac{z_2}{z_1}=1-2i$; в) $z_2-z_1=1-\sqrt{2}+(\sqrt{6}-\sqrt{3})i$, $\frac{z_2}{z_1}=\sqrt{2}$; г) $z_2-z_1=2\sqrt{b}i$, $\frac{z_2}{z_1}=\frac{a^2-b}{a^2+b}+\frac{2a\sqrt{b}}{a^2+b}i$. **1.3.** а) $\frac{13}{20}-\frac{7}{4}i$; б) 0; в) $-2i$; г) $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$; д) 0. **1.4.** а) -2; б) 0. **1.5.** а) 0; б) $-\frac{11}{17}$. **1.6.** а) $-\frac{41}{50}+\frac{63}{50}i$; б) $\frac{22}{159}-\frac{5}{318}i$; в) $-38+41i$; г) $-\frac{18}{25}+\frac{173}{50}i$. **1.7.** а) $-1-i$; б) $0, -1, \frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$. **1.8.** (3; 4), (3; 5), (4; 4), (4; 5). **1.9.** (−2; −2), (−2; 2). **1.11.** $z_1=1-i$, $z_2=i$. **1.13.** $z_4=z_1+z_2-z_3$. **1.14.** $t(7+i)$, t — произвольное положительное число. **1.15.** а) 3; б) 1; в) 7; г) $\sqrt{2}$; д) 1; е) 7. **1.16.** а) $2-\frac{3}{2}i$; б) $0, 3i, -3i$; в) bi, $b\in R$. **1.17.** $\frac{7}{6}+\frac{5}{6}i$. **1.18.** а) Круг (вместе с границей) с центром в точке $z=0$ радиуса $R=1$; б) окружность с центром в точке $z=0$ и радиусом $R=2$; в) точка $z=i$; г) левая полуплоскость, ограниченная мнимой осью; д) полуплоскость, ограниченная биссектрисами второго и четвертого координатных углов и содержащая точку $z=-1$; е) круг (вместе с границей) с центром в точке $z=1-2i$ радиуса $R=2$; ж) множество состоит из точек, лежащих внутри окружности радиуса $R=3$ с центром в точке $z=1-2i$ и вне или на окружности радиуса $R=2$ с центром в той же точке; з) множество представляет собой бесконечную систему концентрических колец с центром в точке $z=0$, в это множество входят кольца, содержащие интервалы $2k\pi < x < (2k+1)\pi$, $k\in Z$, действительной оси; и) в множество входят все точки круга радиуса $R=10$ с центром в точке $z=10i$, кроме центра круга; к) окружность радиуса $R=3$ с центром в точке $z=-3$. **1.19.** $-\frac{3}{2}-\frac{17}{4}i$; $-\frac{3}{2}-2i$. **1.20.** а) $\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in Z$; б) $\frac{\pi}{4}+2\pi k$, $k\in Z$; в) $\pi+2\pi k$; $k\in Z$; г) $2\pi k$, $k\in Z$; д) $-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in Z$; е) $-\frac{\pi}{4}+2\pi k$, $k\in Z$.

1.21. а) Действительная положительная полуось $z=x>0$; б) мнимая полуось $z=iy$, $y>0$; в) мнимая полуось $z=iy$, $y>0$; г) верхняя полуплоскость $z=x+iy$, $y>0$; д) вся комплексная плоскость, за исключением точки $z=0$. **1.22.** Действительная отрицательная полуось $z=x$, $x<0$. **1.23.** i. **1.24.** $\frac{12}{5}+\frac{16}{5}i$. **1.25.** а) $2\left(\cos\frac{11}{6}\pi+i\sin\frac{11}{6}\pi\right)$; б) $2(\cos\pi+i\sin\pi)$; в) $\cos 0+i\sin 0$; г) $\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$; д) $\cos\frac{4\pi}{5}+i\sin\frac{4\pi}{5}$; е) $\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}$; ж) $-2\cos\frac{5\pi}{9}\left(\cos\frac{14\pi}{9}+i\sin\frac{14\pi}{9}\right)$. **1.26.** а) $z=1=\cos 0+i\sin 0$; б) $z=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}$; в) $z=\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(\cos 0+i\sin 0)$; г) $z=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}$; д) $z=-i=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}$. **1.27.** а) $\frac{5}{3}(\cos 230^\circ+i\sin 230^\circ)$; б) $\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{5}\left(\cos\frac{29\pi}{20}+i\sin\frac{29\pi}{20}\right)$. **1.28.** $-10+4i$. **1.29.** $3-\frac{9}{2}i$. **1.30.** а) $-\frac{\sqrt{2}}{16}+i\frac{\sqrt{2}}{16}$; б) 1; в) $\cos 50^\circ+i\sin 50^\circ$; г) $\frac{1}{64}-\frac{\sqrt{3}}{64}i$; д) -2; е) 2. **1.31.** а) $2^{100}\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$; б) $8\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$; в) $2(\cos 0+i\sin 0)$, если n четное; $2(\cos\pi+i\sin\pi)$, если n нечетное; г) $\frac{1}{\cos^4 1}(\cos 4+i\sin 4)$; д) $\frac{1}{\cos^4 2}(\cos 8+i\sin 8)$; е) $-32\cos^5\frac{3\pi}{5}\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$. **1.32.** $n=4k$, $k\in Z$. **1.33.** а) $-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, -1, $\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\sqrt{3}+i$, $-\sqrt{3}+i$, $-2i$; г) 1, $\cos 72^\circ+i\sin 72^\circ$, $\cos 144^\circ+i\sin 144^\circ$, $\cos 216^\circ+i\sin 216^\circ$, $\cos 288^\circ+i\sin 288^\circ$. **1.34.** а) $\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$, $\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$, $\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12}+i\sin\frac{17\pi}{12}\right)$; б) $\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16}+i\sin\frac{\pi}{16}\right)$, $\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{16}+i\sin\frac{9\pi}{16}\right)$, $\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{16}+i\sin\frac{17\pi}{16}\right)$, $\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{25\pi}{16}+i\sin\frac{25\pi}{16}\right)$; в) $\sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{\pi}{15}+i\sin\frac{\pi}{15}\right)$, $\sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{15}+i\sin\frac{7\pi}{15}\right)$, $\sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{13\pi}{15}+i\sin\frac{13\pi}{15}\right)$, $\sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{19\pi}{15}+i\sin\frac{19\pi}{15}\right)$, $\sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$; г) $\sqrt{3}+i$, $2i$, $-\sqrt{3}+i$, $-\sqrt{3}-i$, $-2i$, $\sqrt{3}-i$. **1.35.** а) $1+2i$, $1-2i$; б) $2+i$, $-2+i$; в) $3+5i$, $2-3i$; г) $5+i$, $3+2i$. **1.36.** $-\frac{3}{2}i$. **1.37.** $2(\cos 144^\circ+i\sin 144^\circ)$,

$2(\cos 216^\circ + i\sin 216^\circ)$, $\sqrt[5]{31}(\cos 108^\circ + i\sin 108^\circ)$, $-\sqrt[5]{31}$, $\sqrt[5]{31}(\cos 252^\circ + i\sin 252^\circ)$. **1.38.** а) $e^2\cos 1 - e^2 i\sin 1$; б) i; в) $-e^7\sin 3 + ie^7\cos 3$. **1.39.** а) $4e^{i\frac{7\pi}{6}}$; б) $e^{i\frac{6\pi}{7}}$. **1.40.** а) $e^{2\pi i} = 1$; б) $8e^{-i\frac{\pi}{4}} = 4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}i$; в) $64e^{i\pi} = -64$; г) $e^{-i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$; д) $2^7 e^{\frac{3}{2}\pi i} = -2^7 i$. **1.41.** а) $1, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $2e^{\frac{2\pi i}{9}}, 2e^{\frac{8\pi i}{9}}, 2e^{\frac{14\pi i}{9}}$; г) $\sqrt[4]{1/8} + i\sqrt[4]{9/8}, -\sqrt[4]{9/8} + i\sqrt[4]{1/8}, -\sqrt[4]{1/8} - i\sqrt[4]{9/8}, \sqrt[4]{9/8} - i\sqrt{1/8}$.

ГЛАВА II

2.2. а) 3,003; б) 1,4435; в) 2,89; г) 3,11; д) 1,316; е) 3,083. **2.3.** а) 4,0208; б) 1,995; в) 5,00177; г) 0,484; д) 0,05; е) −0,0175; ж) 0,965; з) 1,037; и) −0,03. **2.4.** 1) $\frac{x^5}{5} + C$; 2) $\frac{5}{8}x^8 + C$; 3) $-\frac{3}{\sqrt[3]{x}} + C$; 4) $\frac{x^6}{6} - \frac{x^4}{4} + C$; 5) $\frac{ax^2}{2} + bx + C$; 6) $7t - \frac{3}{2}t^2 - \frac{t^4}{4} + C$; 7) $\frac{1}{2}u^4 - \frac{5}{3}u^3 - \frac{7}{2}u^2 - 3u + C$; 8) $-\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x^4} + C$; 9) $\frac{2}{3}t^{3/2} - \frac{3}{2}t^{2/3} + C$; 10) $\frac{a}{8}x^8 + \frac{b}{4}x^4 + \frac{c}{3}x^3 + \frac{d}{2}x^2 + \frac{2}{3}ex\sqrt{x} + fx + C$; 11) $\frac{x^6}{6} - x^3 + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + C$; 12) $\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}x - \ln|x| + \frac{1}{x} + C$; 13) $\frac{2}{5}t^{5/2} + \frac{t^2}{2} + 6\sqrt{t} + C$; 14) $\frac{4^x}{\ln 4} + C$; 15) $\frac{b^x}{\ln b} + C$; 16) $\frac{t^8}{8} + \frac{7^t}{\ln 7} + C$; 17) $\frac{2250^x}{\ln 2250} + C$; 18) $3x - 5\ln|x+2| + C$; 19) $\frac{t^2}{2} + 2t + \frac{3}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{5}} + C$; 20) $\frac{1}{12}\operatorname{arctg}\frac{3x}{4} + C$; 21) $\arcsin\frac{x}{5} + C$; 22) $\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{3}}{t+\sqrt{3}}\right| + C$; 23) $\ln|x + \sqrt{x^2-13}| + C$; 24) $\frac{1}{2}\arcsin\frac{2t}{3} + C$; 25) $\frac{1}{2\sqrt{10}}\ln\left|\frac{x+\sqrt{5/2}}{x-\sqrt{5/2}}\right| + C$; 26) $3e^x - 5\cos x + 3\sin x + 4x + C$; 27) $2\sin x + C$; 28) $\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C$; 29) $\frac{1}{14}\sin 7x - \frac{1}{26}\sin 13x + C$; 30) $-\frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{20}\cos 10x + C$; 31) $\frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{8}\sin 4x + C$; 32) $\frac{1}{10}\sin 5x + \frac{1}{22}\sin 11x + C$;

33) $-\frac{1}{7}\cos 7x + C$; 34) $-\frac{5}{3}\cos\frac{3}{5}x + C$; 35) $\frac{1}{10}\sin 10x + C$;
36) $9\sin\frac{x}{9} + C$; 37) $-\frac{1}{11}\cos 11x + \frac{1}{6}\sin 6x - 7\cos\frac{x}{7} + \frac{4}{3}\sin\frac{3x}{4} + C$;
38) $e^x - e^{-x} + C$; 39) $\frac{1}{3}e^{3x+5} + C$; 40) $\frac{1}{18}(3x-1)^6 + C$; 41) $\frac{5}{32}(1 +$
$+ 4x)^{8/5} + C$; 42) $\ln(3x^2 + 7x + 4) + C$; 43) $\frac{1}{42}\ln(7x^6 + 1) + C$;
44) $-\frac{1}{90}(3 + 5x^3)^{-6} + C$; 45) $\frac{1}{9}\sqrt{(3x^2-1)^3} + C$; 46) $-\frac{1}{6}\cos^6 x + C$;
47) $-\frac{3}{4}(1 + \cos x)^{4/3} + C$; 48) $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$; 49) $\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$;
50) $\frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$; 51) $\frac{1}{4}e^{x^4} + C$; 52) $-e^{\cos x} + C$;
53) $3\ln|\operatorname{arctg} x| + C$; 54) $\frac{1}{3}\sqrt{(\operatorname{arctg} 2x)^3} + C$; 55) $\frac{1}{3}(x-3)\sqrt{2x+3} +$
$+ C$; 56) $\arcsin\frac{x-3}{6} + C$; 57) $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x+5}{4} + C$; 58) $\arcsin(2x-1) + C$;
59) $\ln|x + 2 + \sqrt{x^2 + 4x + 7}| + C$; 60) $\ln\left|x + \frac{3}{2} + \sqrt{x^2 + 3x}\right| + C$;
61) $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x+3}{4} + C$; 62) $\frac{2}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{2x+5}{\sqrt{11}} + C$; 63) $\frac{x^2}{4}(2\ln x - 1) + C$;
64) $-x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C$; 65) $\left(\frac{3}{2}x^2 - 4x\right)\ln x - \frac{3}{4}x^2 +$
$+ 4x + C$; 66) $x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + C$; 67) $\frac{13-6x}{9}e^{-3x} + C$;
68) $x\arccos x - \sqrt{1 - x^2} + C$; 69) $2x\sin\frac{x}{2} + 4\cos\frac{x}{2} + C$; 70) $(6-4x)\times$
$\times\cos\frac{x}{2} + 8\sin\frac{x}{2} + C$; 71) $-(x^2 + 2x + 2)e^{-x} + C$; 72) $\frac{x}{2}\sqrt{x^2 - 2} -$
$- \ln|x + \sqrt{x^2 - 2}| + C$; 73) $x\arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + C$; 74) $\frac{e^x}{2}\times$
$\times(\sin x + \cos x) + C$; 75) $\frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C$; 76) $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x+4}{3} + C$;
77) $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{4} + C$; 78) $\frac{1}{9}\ln\left|\frac{x-1}{x+8}\right| + C$; 79) $\ln|x-2| - \frac{5}{x-2} + C$;
80) $\frac{1}{2}\ln(x^2 + x + 1) + \sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$; 81) $-\frac{1}{4}\ln|x| + \frac{13}{12}\ln|x +$
$+ 4| + \frac{1}{6}\ln|x - 2| + C$; 82) $\frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2 + x + 1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$;
83) $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C$; 84) $\frac{1}{8}\ln|x+1| + \frac{1}{x+2} + 2\ln|x+2| +$
$+ \frac{1}{4}\frac{1}{(x+3)^2} + \frac{5}{4(x+3)} - \frac{17}{8}\ln|x+3| + C$.

ГЛАВА III

3.1. 4,5. 3.2. b^2-a^2. 3.3. $e-1$. 3.5. а) 20; б) $\frac{21}{8}$; в) $\frac{14}{3}$; г) $\frac{1}{2}$; д) 0. 3.6. а) 4; б) 1; в) 1,5. 3.7. $\frac{1}{3}(4\sqrt{2}-1)$. 3.8. а) $\frac{2}{3}$; б) $\frac{1}{2}(e^2-1)$; в) $\frac{10}{3}$; г) $\ln(1+e)$; д) 2; е) $\frac{\pi}{2}$. 3.9. а) $\frac{28}{3}$; б) 12; в) $\frac{1}{5}(e-1)^5$; г) $\frac{1}{4}$. 3.10. а) $\frac{4}{3}\pi+\sqrt{3}$; б) $\frac{\pi a^4}{16}$; в) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$; г) $4-2\ln 3$; д) $\frac{\pi}{3}$. 3.12. а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{1}{2}$. 3.13. а) 1; б) 1; в) $\pi-2$; г) 2; д) $\ln 2-\frac{1}{2}$; е) $\frac{\pi a^2}{4}$; ж) $\frac{\pi(9-4\sqrt{3})}{36}+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$. 3.15. 0,7462. 3.17. 1,12.

ГЛАВА IV

4.1. а) 36 (кв. ед.); б) $\frac{2}{3}$ (кв. ед.); в) $\frac{32}{3}$ (кв. ед.); г) 8 (кв. ед.); д) $\frac{77}{6}$ (кв. ед.); е) $\frac{8}{3}$ (кв. ед.); ж) $\frac{ab}{3}$ (кв. ед.); з) $\frac{4}{3}$ (кв. ед); и) $(22\ln 2-6)$ (кв. ед.); к) $\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$ (кв. ед.); л) $\frac{3}{4}$ (кв. ед.); м) $\ln 2$ (кв. ед.); н) $\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)$ (кв. ед.). 4.2. а) $\frac{1}{4}\ln(2+\sqrt{5})+\frac{\sqrt{5}}{2}$; б) $1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$; в) $\sqrt{1+e^2}+\sqrt{2}-1-\ln\frac{1+\sqrt{1+e^2}}{1+\sqrt{2}}$; г) $\ln\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)$; д) $2\pi^2 a$; е) $\sqrt{2}(\pi-1)$; ж) 12; з) $\frac{a}{2}(e-e^{-1})$; и) $\frac{1}{2}\ln 3$; к) $6a$. 4.3. $\frac{265}{3}$ м. 4.4. 42 м. 4.5. 32 м. 4.6. 5 с. 4.7. $a=20$. 4.8. 19 м. 4.9. 122,375 м. 4.10. $\left(8R+\frac{16a}{3}\right)$ м. 4.11. 2,45 МН. 4.12. $\frac{H^2}{6}(a+2b)$, 523 МН. 4.13. 1,4 МН. 4.14. 1,8 МН; 1,35 МН. 4.15. 161 700π Н. 4.16. $\frac{aH^2}{2}$. 4.17. 1724,8 Н. 4.18. 739,9 кН. 4.19. 17 863,2 Н. 4.20. 39 Дж. 4.21. 900 Дж. 4.22. 12,5 Дж. 4.23. 0,288 Дж. 4.24. 11,25 Дж. 4.25. 2452,5 Дж. 4.26. 3,1392 Дж. 4.27. 0,16 Дж. 4.28. 0,54 Дж. 4.29. 5 Дж. 4.30. $\frac{a^2}{8}(e^2-e^{-2}+4)$. 4.31. $M_x=\frac{5\sqrt{5}-1}{3}$, $M_y=\frac{9}{8}\sqrt{5}+\frac{1}{16}\ln(2+\sqrt{5})$. 4.32. $M_x=\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})$. 4.33. $C\left(\frac{3}{5};\frac{3}{4}\right)$. 4.34. $C(9;9)$.

4.35. $C\left(\pi a;\ \frac{4}{3}a\right)$. **4.36.** $C\left(\frac{4a}{3\pi};\ \frac{4b}{3\pi}\right)$. **4.37.** $C\left(0;\ \frac{8}{5}\right)$. **4.38.** $C\left(0;\ \frac{4a}{3\pi}\right)$. **4.39.** πRl, $\frac{1}{3}\pi R^2H$. **4.40.** $\frac{\sqrt{3}\,\pi a^2 d}{2}$.

ГЛАВА V

5.2. $\{(x;\ y)\,|\,xy \leqslant 1;\ x^2 \neq y^2\}$. **5.4.** а) $\frac{\partial z}{\partial x}=\sin y+y\cos x$; $\frac{\partial z}{\partial y}=x\cos y+\sin x$; б) $\frac{\partial z}{\partial x}=ye^{xy}\operatorname{tg}(x+y)+\frac{e^{xy}}{\cos^2(x+y)}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=$ $=xe^{xy}\operatorname{tg}(x+y)+\frac{e^{xy}}{\cos^2(x+y)}$; в) $\frac{\partial y}{\partial x}=2x\sin(at+x)+x^2\cos(at+x)$; $\frac{\partial y}{\partial t}=ax^2\cos(at+x)$; г) $\frac{\partial s}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^4}}$; $\frac{\partial s}{\partial y}=\frac{2y^3}{\sqrt{x^2+y^4}}$. **5.6.** а) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-x\sin y$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=1+\cos y$; б) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=1$; в) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=$ $=-y\sin(x+at)$; $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$; $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=-a^2y\sin(x+at)$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=\cos(x+at)$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=-ay\sin(x+at)$; $\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial t}=a\cos(x+at)$; г) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=2$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}=1$. **5.7.** $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{z}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{z}$. **5.8.** 0. **5.9.** а) $dz=-y\sin xy\,dx-x\sin xy\,dy$; б) $dz=(2xy+y^2)\,dx+(x^2+2xy)\,dy$; в) $dz=\left(e^y-\frac{y}{\sin^2 x}\right)dx+(xe^y+\operatorname{ctg}x)\,dy$. **5.10.** $f(0{,}1;\ 0{,}2)\approx 0{,}3$; $f(0{,}2;\ 0{,}1)\approx 0{,}3$. **5.11.** а) $\frac{1}{3}+2\sin 1$; б) $\sin 1$; в) $\frac{(e-1)^2(e+1)}{3e}$; г) 0. **5.12.** $\frac{a^4}{4}-\frac{a^5}{5}-\frac{a^2}{2}+\frac{1}{2}e^{a^2}-\frac{1}{2}$. **5.13.** $\frac{23}{336}$. **5.14.** 0. **5.15.** $\frac{2}{15}$. **5.16.** а) 0; б) $\frac{1}{2}$; в) $\frac{\sin 1}{3}$. **5.17.** 6. **5.18.** $\frac{1}{4}$. **5.19.** $\frac{3}{4}\pi R^2h^2$.

ГЛАВА VI

6.1. а) 5; б) 969; в) 256; г) $k(k+1)$; д) n. **6.2.** а) 9; 10; б) 7; в) 10; г) 11. **6.3.** $\{3;\ 4;\ 5\}$ и $\{1;\ 3;\ 2\}$. **6.4.** 12. **6.5.** 16. **6.6.** 18; 10. **6.7.** а) 120; б) 60; в) 420; г) 83 160. **6.8.** 72. **6.9.** 15. **6.10.** 43 200. **6.11.** $\frac{1}{15}$. **6.12.** а) 8; б) 8; в) 27; г) 2. **6.13.** $\{4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8;\ 9\}$ и $\{1;\ 15;\ 35;\ 14;\ 9;\ 1\}$. **6.14.** а) $\{8;\ 9;\ 10\}$; б) $\{0;\ 1;\ 2;\ \ldots;\ 27\}$. **6.15.** а) 60; б) 10. **6.16.** а) 870; б) 435. **6.17.** 8436. **6.18.** 18. **6.19.** 15. **6.20.** 35. **6.21.** 210. **6.22.** 4060. **6.23.** а) 30; б) 62. **6.24.** 5040. **6.25.** 15 625. **6.26.** Может не хватить. **6.27.** Не более $27\cdot 10^2$. **6.28.** а) $(x^2-y)^6=$ $=\sum_{k=0}^{6}C_6^k(x^2)^{6-k}(-y)^k=x^{12}-6x^{10}y+15x^8y^2-20x^6y^3+15x^4y^4-6x^2y^5+$ $+y^6$; б) $(3a^2-2b)^5=\sum_{k=0}^{5}C_5^k(3a^2)^{5-k}(-2b)^k=243a^{10}-810a^8b+$

$+1080a^6b^2-720a^4b^3+240a^2b^4-32b^5$. **6.29.** а) $\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^7+$ $+7\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^5+21\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^3+35\sqrt{\frac{a}{b}}+35\sqrt{\frac{b}{a}}+$ $+21\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^3+7\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^5+\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^7$; б) $x^{16}-16x^{13}+112x^{10}-$ $-448x^7+1120x^4-1792x+\frac{1792}{x^2}-\frac{1024}{x^5}+\frac{256}{x^8}$. **6.30.** а) $109\sqrt{2}-89\sqrt{3}$; б) 64. **6.31.** а) $-2099\,520x^3$; б) $126\sqrt[3]{a}$. **6.32.** а) $252\sqrt[3]{x^2}$; б) $1716a^3\sqrt{a}\,b^2$, $-1716a^3b^2\sqrt[3]{b}$. **6.33.** а) 15; б) 495. **6.34.** а) 5280; б) 5005. **6.35.** 10. **6.36.** 1120. **6.37.** а) 2772; б) 625; 7000; 7000; 1120; 16. **6.38.** а) $\frac{1}{2^{100}}C_{100}^{50}$; б) $\frac{4}{3}\left(\frac{9}{10}\right)^{12}$; в) $\frac{2^{21}}{3^{77}}C_{105}^{28}$; г) $\sqrt{10}\cdot 50^3C_{20}^7$. **6.39.** а) 378; б) 17 550. **6.40.** а) $2^n-2(n+1)$; б) 0; в) 2^{2n-1}; г) 2^{2n-1}. **6.41.** а) 1; б) -1.

ГЛАВА VII

7.1. а) По крайней мере один выстрел оказался удачным; б) все три выстрела были удачными; в) мишень поражена одним и только одним выстрелом. **7.2.** $B=A_1\cup(A_2\cap A_3)$, $\overline{B}=\overline{A}_1\cap(\overline{A}_2\cup\overline{A}_3)$. **7.3.** $A\cup B=U$, т. е. события A и B образуют полную систему событий. События A и B не являются несовместными. **7.5.** а) $\frac{1}{4}$; б) $\frac{1}{3}$; в) 0; г) $\frac{5}{12}$. **7.6.** $\frac{5}{36}$. **7.7.** $\frac{164}{1081}$. **7.8.** а) $\frac{9}{17}$; б) $\frac{8}{17}$. **7.11.** а) 0,94; б) 0,38. **7.12.** $\frac{19}{30}$. **7.13.** Не могут. **7.14.** Не являются. **7.15.** A и B зависимы, B и C зависимы, A и C независимы. **7.16.** Попарно независимы, но не являются независимыми в совокупности. **7.17.** 0,976. **7.18.** 0,819. **7.19.** $P_1=p^3(2-p^3)$, $P_2=p^3(2-p)^3$, $P_2>P_1$, если $0<p<1$. **7.20.** $1-(1-p)^{12}$. **7.21.** По крайней мере 13 раз. **7.22.** $\frac{3}{5}$ и $\frac{2}{5}$. **7.23.** 0,78. **7.24.** 0,014. **7.25.** 0,775. **7.26.** $\frac{10}{17}$. **7.27.** 0,998. **7.28.** $\frac{(1-p_1)p_2}{1-p_1p_2}$. **7.29.** $\frac{2}{3}$. **7.30.** $\frac{2}{3}$. **7.31.** $\approx$0,04. **7.32.** $\approx$0,02. **7.33.** $\frac{13}{16}$. **7.34.** а) Вероятность выигрыша трех партий из четырех больше вероятности выигрыша пяти партий из восьми; б) вероятность выигрыша не менее пяти партий из восьми больше вероятности выигрыша не менее трех партий из четырех. **7.35.** $P_5(5)\approx 0{,}132$; $P_5(4)=P_5(3)\approx 0{,}329$; $P_5(2)\approx 0{,}165$; $P_5(1)\approx 0{,}041$; $P_5(0)\approx 0{,}004$. **7.36.** 84. **7.37.** Вероятность одна и та же, так как $C_{50}^{17}\left(\frac{1}{3}\right)^{17}\left(\frac{2}{3}\right)^{33}=$ $=C_{50}^{16}\left(\frac{1}{3}\right)^{16}\left(\frac{2}{3}\right)^{34}$. **7.38.** 0,026. **7.39.** а) Может; б) не может. **7.40.** В примере 1 не является, в примере 2 является.

7.41.

0	1	2	3
0,125	0,375	0,375	0,125

7.42.

1	4	9	16	25	36
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

7.43.

0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1
0,216	0,432	0,288	0,064

7.44. $MX = 2{,}2$, $DX = 0{,}76$. **7.45.** $MX = 6$, $DX = 9$. **7.46.** а) $MX = \frac{3}{2}$, $DX = \frac{3}{4}$; б) $MX = \frac{2}{5}$, $DX = \frac{2}{25}$. **7.47.** $MX = \frac{91}{6}$. **7.48.** $MX = \frac{4}{5}$, $DX = \frac{9}{25}$. **7.49.** $MX = 100$, $DX = 8$. **7.50.** $MX = 4900$, $DX = 98$.

7.51.

1	2	3	4
$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{27}$	$\frac{1}{27}$

$MX = \frac{40}{27}$, $DX = \frac{452}{729}$.

7.52. Стоимость билета не должна превышать 11 копеек, так как математическое ожидание выигрыша $\approx 11{,}6$ копейки. **7.53.** а) Невыгодна; б) выгодна; в) игра безобидна, так как математическое ожидание выигрыша равно нулю.

ГЛАВА VIII

8.1. $x' = x \ln 2$; $x = C \cdot 2^t$. **8.2.** $x' = x \ln 0{,}99$; $x = C \cdot 0{,}99^t$. **8.3.** $T = -\frac{\ln 2}{\ln 0{,}99}$. **8.4.** 3,9 кг. **8.5.** 56,5 г. **8.6.** $y = 4e^x$. **8.7.** $\omega = \omega_0 e^{-kt}$. **8.8.** $T = 20 + 80\left(\frac{1}{2}\right)^{t/20}$; 60 мин. **8.9.** а) Да; б) нет; в) нет. **8.10.** а) Да; б) да; в) да. **8.11.** а) $\alpha = -2$; б) $\alpha = \frac{1}{2}$; в) $\alpha = 2$,

$\alpha \neq -3$. 8.12. $A=0$, α любое; $\alpha=-1$, A любое. 8.13. а) $y=\frac{x^2}{2}-$ $-\cos x+C$; б) $y=\ln(1-Ce^{-x})$; в) $y=C(x-1)-1$; г) $y=Ce^{\sqrt{1-x^2}}$; д) $y=e^{C\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$; е) $y=-\ln(C-e^x)$, $C>0$; ж) $y=C\cos x$; з) $y=$ $=\ln(Cx^2+C-1)$; и) $y=C(1+x)^2$; к) $y=C(1+x)e^{-x}$; л) $y=\operatorname{tg}\ln Cx$. 8.14. а) $y=\frac{1}{27}(x+C)^3$, $y=0$; б) $y=\sin(x+C)$, $y=1$, $y=-1$; в) $y=(x^2+C)^2+1$, $y=1$; г) $y=\frac{1}{1+Cx}$, $y=0$; д) $y=\frac{2}{Ce^{-x^2}-1}$, $y=0$; е) $y=\left(C+\frac{\sin 2x}{8}-\frac{x}{4}\right)^2$, $y=0$. 8.15. а) $x=\frac{3}{4}t^2$; б) $x=\frac{1}{1-t}$; в) $x=-\sqrt{\frac{6+t^2}{1+t^2}}$. 8.16. а) 1) $y=x$; 2) $y=0$; б) $y=\arcsin x-\frac{\pi}{4}$. 8.17. $y=Cx^2$; $y^2=Cx$. 8.18. $s=25\cdot 2^{t/5}$. 8.19. а) $(1+y)e^{-y}=$ $=\ln\frac{1+e^x}{2}+1-x$; б) $\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}=1$, $y=1$. 8.20. а) $x=$ $=Ct^{-2}+\frac{1}{5}t^3$; б) $x=Ce^{-t^2}+1$; в) $x=C\cos t+\sin t$; г) $x=$ $=\left(C+\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{4}t^4\right)e^{t^2}$; д) $x=\frac{Ct}{t^3+1}+\frac{1}{t}$. 8.21. а) $x=t$; б) $x=\frac{t}{\cos t}$; в) $x=8\sin^2\frac{t}{2}+e^{1-\cos t}$; г) $x=\frac{3(t+1)^2+(t+1)^4}{2}$. 8.22. $I=\frac{V}{R}\times$ $\times\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right)$. Указание. Задача сводится к интегрированию уравнения $L\frac{dI}{dt}+RI=V$ при начальном условии $I(0)=0$. 8.23. $I=$ $=\frac{V}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\sin\left(\omega t-\operatorname{arctg}\frac{\omega L}{R}\right)$. Указание. Задача сводится к отысканию периодического решения уравнения $L\frac{dI}{dt}+RI=V\sin\omega t$. 8.24. $x=600(1-e^{-0,01t})$. Указание. Задача сводится к интегрированию уравнения $mx''=-kx^t$ при начальных условиях $x(0)=0$, $x'(0)=6$. 8.25. $x=\frac{2kv_0+g}{4k^2}(1-e^{-2kt})-\frac{gt}{2k}$. Указание. Задача сводится к отысканию решения уравнения $mx''+2kmx'=-mg$, удовлетворяющего условиям $x(0)=0$, $x'(0)=v_0$. 8.26. $t=\frac{h(v_1-v_0)}{v_0v_1\ln\frac{v_1}{v_0}}$ с. 8.27. $mx''=t^2$; $x=\frac{1}{12m}t^4+C_1t+C_2$. 8.28. $x=-\frac{1}{40}t^5+\frac{1}{4}t^2+C_1t+C_2$. 8.29. $x=\frac{5}{12}t^4+\frac{1}{20}t^2+1$. 8.30. $x''+x=0$. 8.31. а) Описывает; б), в), г) не описывают. 8.32. $x=a\left(1-\cos\sqrt{\frac{g}{l}}t\right)$. Указание. Задача сводится к интегрированию уравнения $lx''+gx=ag$ при на-

чальных условиях $x(0)=x'(0)=0$. 8.33. $x=\frac{l}{2}\left(e^{\sqrt{\frac{g}{2l}}t}+e^{-\sqrt{\frac{g}{2l}}t}\right)$, $T=\sqrt{\frac{2l}{g}}\ln(2+\sqrt{3})$. Указание. Удобно выбрать начало координат в точке, где в начальный момент находится середина цепочки; тогда x является решением уравнения $2lx''=gx$ при условиях $x(0)=l$, $x'(0)=0$. 8.34. а) $x=C_1+C_2e^{2t}$; б) $x=C_1e^{-2t}+C_2e^{-3t}$; в) $x=C_1e^{2t}+C_2e^{-\frac{4}{3}t}$; г) $x=e^{-2t}(C_1\cos 3t+C_2\sin 3t)$; д) $x=e^{-t/2}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$; е) $x=e^{3t}(C_1+C_2t)$; ж) $x=C_1e^{-t}+C_2e^t-2$; з) $x=C_1+C_2e^{-2t}+t$; и) $x=C_1\sin 3t+C_2\cos 3t+1$; к) $x=C_1e^{-t}+C_2e^{3t}+\frac{1}{5}e^{4t}$; л) $x=C_1e^t+C_2e^{2t}+\frac{1}{10}(\sin t+3\cos t)$; м) $x=C_1\sin t+C_2\cos t-2t\cos t$. 8.35. а) $x=e^t+e^{2t}$; б) $x=e^{-t}(\sin 2t+\cos 2t)$; в) $x=e^{-3t}(2+7t)$; г) $x=ae^{-t}\cos t+(a+b)e^{-t}\sin t$; д) $x=\frac{4}{5}e^{-2t}+\frac{8}{15}e^{3t}-\frac{1}{3}$; е) $x=\frac{7}{27}e^{3t}-\frac{1}{27}e^{-3t}+\frac{1}{9}t-\frac{2}{9}$; ж) $x=2\sin 2t+\frac{1}{2}t\sin 2t$. 8.36. $\alpha=0$, $\beta>0$. 8.37. $\alpha=k^2$, k—целое число; $x=C\sin kt$, C—произвольная постоянная.

ГЛАВА IX

9.1. а) -1; б) $\frac{1}{2}$; в) $\frac{5}{9}$; г) $-\frac{1}{8}$; д) $\frac{7}{99}$. 9.2. а) Расходится; б) расходится; в) расходится. 9.3. а) Сходится; б) расходится; в) расходится; г) сходится; д) сходится; е) расходится. 9.4. а) Сходится; б) сходится; в) сходится; г) сходится; д) сходится. 9.5. а) Сходится условно; б) расходится; в) сходится абсолютно; г) сходится условно; д) сходится условно; е) сходится абсолютно. 9.6. а) $R=2$; б) $R=2$; в) $R=\sqrt[3]{3}$; г) $R=+\infty$; д) $R=0$. 9.7. а) $|z-1|<3$; б) $|z+i|<2$; в) $|z+1-i|<\sqrt{2}$; г) вся комплексная плоскость. 9.8. а) $]-1;\ 1[$; б) $]-1;\ 1[$; в) $[-2;\ 2[$; г) $]-e;\ e[$; д) $[-1;\ 1[$; е) R. 9.9. а) $\ln\cos x=-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}+\ldots$; б) $\sin(\sin x)=x-\frac{x^3}{3}+\ldots$; в) $\operatorname{tg} x=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5+\ldots$ 9.10. а) 0,006; б) 0,07.

9.11. а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^{2n}$, $R=+\infty$; б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(\ln 2)^n}{2^n n!}x^n$, $R=+\infty$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n2^{4n-1}}$, $R=4$; г) $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}$, $R=+\infty$; д) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(n+2)(n+1)}{2}x^n$, $R=1$; е) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{3n}$, $R=1$;

Приложение 1
НЕКОТОРЫЕ ФОРМУЛЫ АЛГЕБРЫ И АНАЛИЗА

I. 1. $a^x a^y = a^{x+y}, \quad a > 0.$

2. $(a^x)^y = a^{xy}, \quad a > 0.$

3. $\log_a xy = \log_a x + \log_a y; \; x > 0; \; y > 0; \; a > 0; \; a \neq 1.$

4. $\log_a x^y = y \log_a x, \; x > 0, \; a > 0, \; a \neq 1.$

5. $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}; \quad a > 0; \quad b > 0; \quad c > 0; \quad a \neq 1; \quad c \neq 1.$

6. $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}; \quad a > 0; \quad b > 0, \quad a \neq 1, \quad b \neq 1.$

II. 1. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$

2. $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha.$

3. $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha.$

4. $\sin^2 \dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1 - \cos \alpha}{2}.$

5. $\cos^2 \dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1 + \cos \alpha}{2}.$

6. $\sin (\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta.$

7. $\sin (\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta.$

8. $\cos (\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.$

9. $\cos (\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta.$

10. $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \dfrac{\alpha + \beta}{2} \cos \dfrac{\alpha - \beta}{2}.$

11. $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \dfrac{\alpha - \beta}{2} \cos \dfrac{\alpha + \beta}{2}.$

12. $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \dfrac{\alpha + \beta}{2} \cos \dfrac{\alpha - \beta}{2}.$

13. $\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \dfrac{\alpha + \beta}{2} \sin \dfrac{\beta - \alpha}{2}.$

14. $\sin \alpha \cos \beta = \dfrac{1}{2} (\sin (\alpha + \beta) + \sin (\alpha - \beta)).$

15. $\sin \alpha \sin \beta = \dfrac{1}{2} (\cos (\alpha - \beta) - \cos (\alpha + \beta)).$

16. $\cos \alpha \cos \beta = \dfrac{1}{2} (\cos (\alpha + \beta) + \cos (\alpha - \beta)).$

III. 1. $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

2. $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

3. $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$.

4. $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$.

5. $\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$.

6. $\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x$.

IV. 1. $(cf)' = cf'$, c — постоянная.

2. $(f+g)' = f' + g'$.

3. $(fg)' = f'g + fg'$.

4. $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf' - g'f}{g^2}$.

V. 1. $(x^n)' = nx^{n-1}$, $n \in N$.

2. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, $\alpha \in R$, $x > 0$.

3. $(a^x)' = a^x \ln a$, $a > 0$.

4. $(e^x)' = e^x$.

5. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$.

6. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, $x > 0$.

7. $(\sin x)' = \cos x$.

8. $(\cos x)' = -\sin x$.

9. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$.

10. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$, $x \neq \pi k$, $k \in Z$.

11. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $|x| < 1$.

12. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $|x| < 1$.

13. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$.

14. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

15. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$.

16. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$.

17. $(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$.

18. $(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$, $x \neq 0$.

Приложение 2

НЕКОТОРЫЕ ЧАСТО ВСТРЕЧАЮЩИЕСЯ ПОСТОЯННЫЕ

$\pi \approx 3{,}1416$	$e \approx 2{,}7183$	$\lg e \approx 0{,}4343$
$\frac{1}{\pi} \approx 0{,}3183$	$\frac{1}{e} \approx 0{,}3679$	$\ln 10 \approx 2{,}3026$
$\pi^2 \approx 9{,}8696$	$e^2 \approx 7{,}3891$	1 радиан $\approx 57°18'$
$\sqrt{\pi} \approx 1{,}7724$	$\sqrt{e} \approx 1{,}6487$	$1° \approx 0{,}0174$ радиан.
$\sqrt[3]{\pi} \approx 1{,}4646$	$\sqrt[3]{e} \approx 1{,}3956$	

Приложение 3

КВАДРАТНЫЕ И КУБИЧЕСКИЕ КОРНИ

n	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$
1	1,00	3,16	1,00	2,15	4,64
2	1,41	4,47	1,26	2,71	5,85
3	1,73	5,48	1,44	3,11	6,69
4	2,00	6,32	1,59	3,42	7,37
5	2,24	7,07	1,71	3,68	7,94
6	2,45	7,75	1,82	3,91	8,43
7	2,65	8,37	1,91	4,12	8,88
8	2,83	8,94	2,00	4,31	9,28
9	3,00	9,49	2,08	4,48	9,65
10	3,16	10,00	2,15	4,64	10,00

70коп.